

Úvod

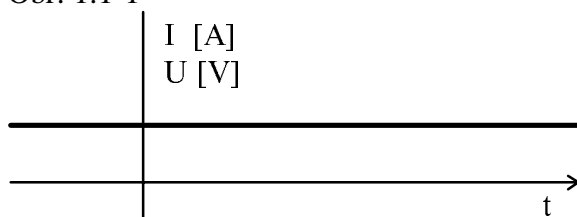
Přednášky a cvičení z předmětu Elektrotechnika I a II ve třetím a čtvrtém semestru I. etapy studia využívají znalostí, které v předchozím studiu získali studenti v přednáškách Matematika 1, 2, 3 a Fyzika 1, 2. Jistou nevýhodou je samozřejmě to, že přednášky o diferenciálních rovnicích probíhají až současně s Elektrotechnikou I, která tyto poznatky v jisté míře využívá. Domníváme se však, že při výkladu je toto využíváno pouze v nezbytně nutné a omezené míře. Na druhé straně však je nutné zdůraznit, že poznatky z matematiky a fyziky a jejich zvládnutí a pochopení jsou nutnou podmínkou ke studiu našeho předmětu.

1. Průběhy napětí a proudu, zákony elektrických obvodů a metody jejich výpočtu

1.1 Stejnoseměrný, střídavý, obecný neharmonický proud; střední a efektivní hodnota; impulsní průběhy; přechodový děj; ustálený stav

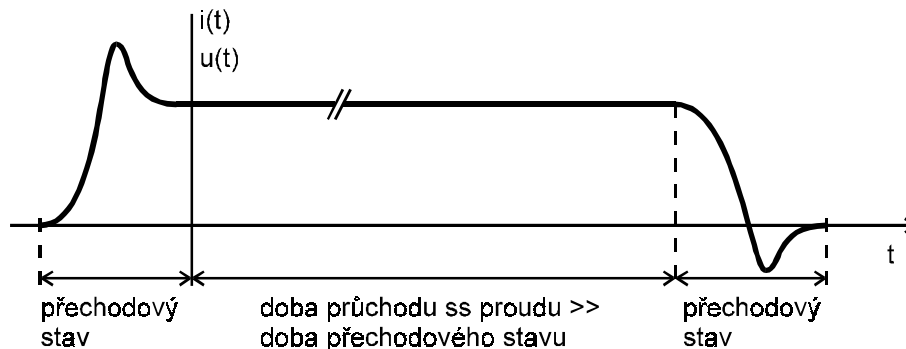
V této úvodní kapitole si řekneme něco o základních tvarech elektrického proudu a napětí, abychom definovali veličiny, s kterými se budeme nadále stýkat.

Stejnoseměrný proud / napětí / - je tím myšlen případ, kdy se na dobu pozorování nemění smysl elektrického proudu / napětí /. V nejjednodušším případě, kdy se nemění velikost, je možné tento případ charakterizovat jedinou konstantní hodnotou I nebo U . Časový diagram bude vypadat takto - viz Obr. 1.1-1



Obr. 1.1-1

Skutečný děj ovšem v reálném čase započal a v nějakém reálném čase skončil. Bude to proto ve skutečnosti vypadat takto - viz Obr. 1.1-2



Obr. 1.1-2

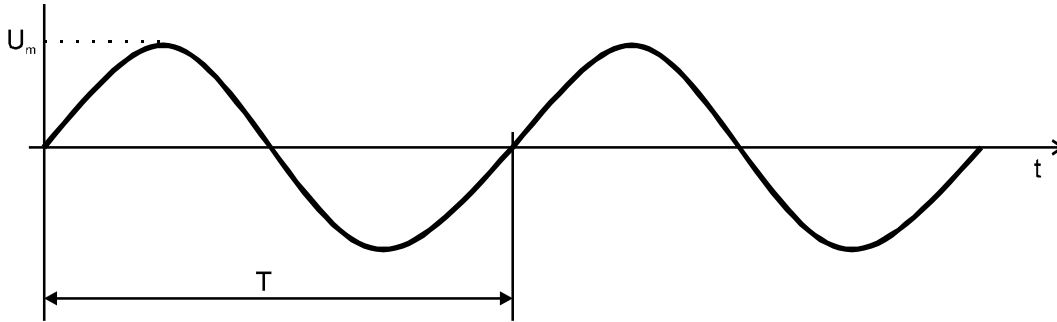
Takto tedy vypadá časový průběh proudu nebo napětí tam, kde užíváme stejnoseměrných / ss / zdrojů / baterie, akumulátor a další /.

Z praktických důvodů / možnost transformace / je elektrická síť (většinou trojfázová, která je schopna vytvořit elektrické točivé pole v elektromotoru) zdrojem proudu střídavého a periodického. Periodický průběh vykazuje funkce, jejichž hodnoty se po určitém čase opakují

$$u(t + kT) = u(t) \quad (1.1.1)$$

kde k je nějaké celé číslo a T je doba periody. Převrácená hodnota doby T se nazývá frekvence $f = 1 / T$ neboli kmitočet.

Napětí v elektrické síti má harmonický charakter a jeho časový diagram může vypadat takto :



Obr. 1.1-3

Dejme tomu, že se jedná o napětí - potom U_m je maximální hodnota našeho časového průběhu a mohu pro něj psát

$$u(t) = U_m \sin \omega t \quad (1.1.2)$$

kde $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

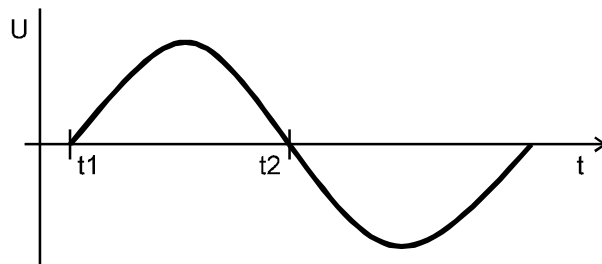
U veličin, které mění polaritu je zvykem definovat tzv. střední hodnotu - běžně se pro pravidelně se opakující průběhy počítá za dobu T a můžeme tedy psát

$$U_{stř} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (1.1.3)$$

Pro náš případ harmonického průběhu je to zřejmě nula, ale z praxe víme, že účinky střídavého proudu nulové nejsou. Proto je lépe pro tento typ průběhu definovat střední hodnotu takto :

$$U_{stř} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt \quad (1.1.4)$$

kde t_1 a t_2 jsou okamžiky vymežující průchod jedné polarity



Obr. 1.1-4

(meze mohou být např. 0 až $T / 2$)

Kdybychom provedli výpočet v těchto mezích, dostali bychom

$$U_{stř} = \frac{2}{\pi} U_{max} = 0,637 \cdot U_{max} \quad (1.1.5)$$

/ Pro síťové napětí je v síťové zásuvce $U_{max} = 311 \text{ V}$ a střední hodnota je 198 V /

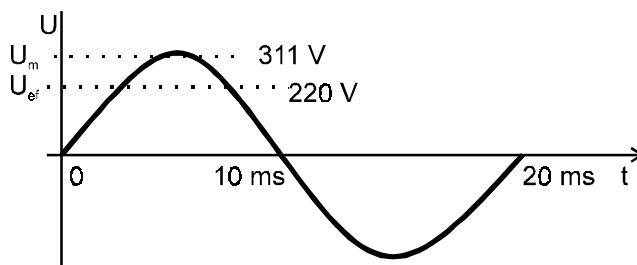
Častěji nás ovšem bude zajímat tzv. efektivní hodnota - ta souvisí s tepelnými účinky elektrického proudu. Je to hodnota ss proudu, který by při průchodu nějakým vodičem vyvinul stejné množství tepla jako proud periodický střídavý. Budeme-li uvažovat napětí, dostaneme pro ní obecně

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (1.1.6)$$

Pro harmonický průběh dostáváme vztah

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (1.1.7)$$

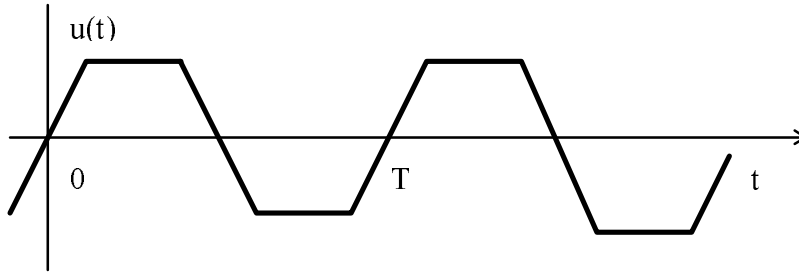
Běžně je velikost střídavého harmonického napětí nebo proudu udávána svojí efektivní hodnotou. Na obrázku jsou poměry při síti $220 \text{ V} \sim 50 \text{ Hz}$ (původní norma)



Obr. 1.1-5

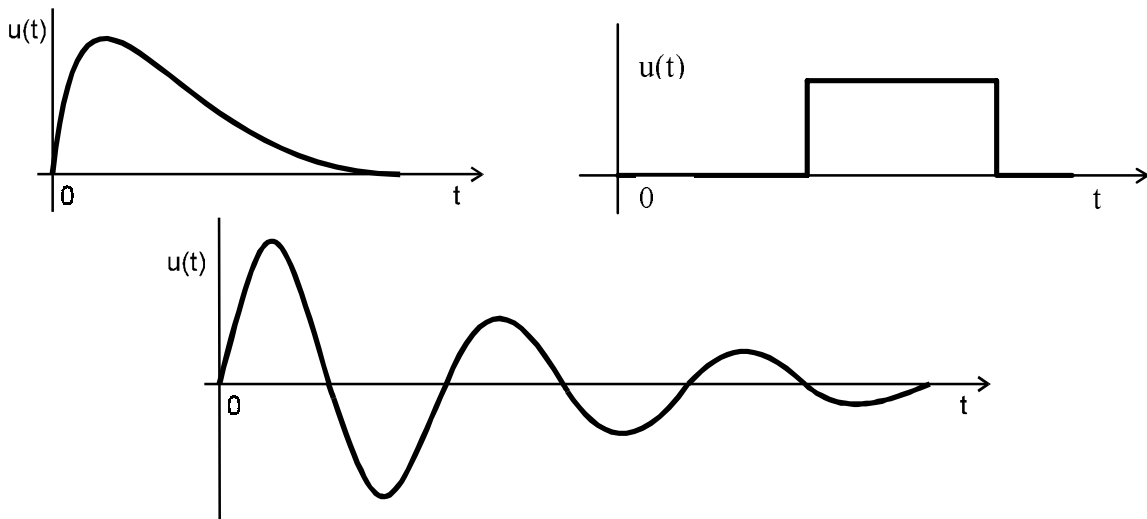
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 20 \text{ ms} \quad U_m = U\sqrt{2} = 220\sqrt{2} = 311 \text{ V}$$

Kromě tohoto jednoduchého průběhu budeme často pracovat s obecnějšími signály např. typu



Obr. 1.1-6

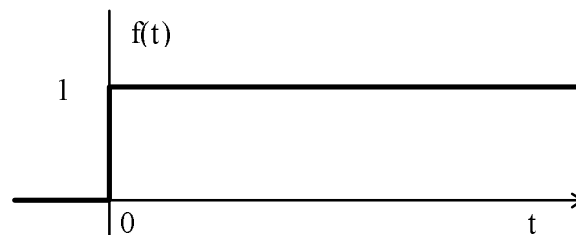
a jinými nebo též s průběhy neperiodickými. Jako příklad si můžeme uvést průběhy na dalším Obr. 1.1-7



Obr. 1.1-7

a jiné průběhy neperiodického charakteru. Z neperiodických idealizovaných průběhů budou pro nás mít základní význam jednotkový skok a jednotkový impuls. Jednotkový skok je definován vztahy

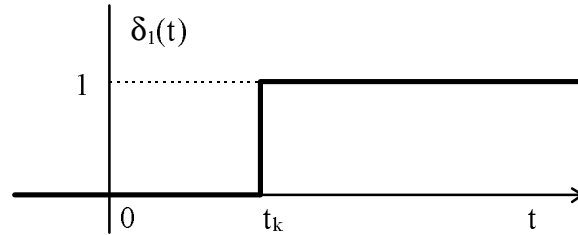
$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{pro } t < 0 \\ f(t) &= 1 && \text{pro } t > 0 \end{aligned} \quad (1.1.8)$$



Obr. 1.1-8

Obvykle se označuje $\delta_1(t)$

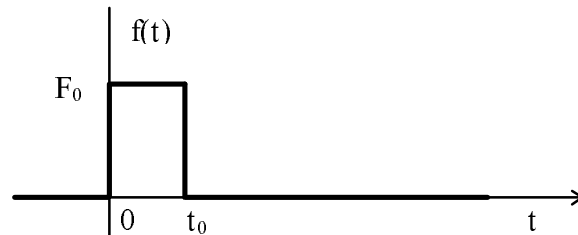
Pokud by byl tento jednotkový skok posunut v čase o hodnotu t_k , pak by vypadal podle Obr. 1.1-9 :



Obr. 1.1-9

$$\delta_1(t - t_k) = \begin{cases} 0 & t < t_k \\ 1 & t > t_k \end{cases} \quad (1.1.9)$$

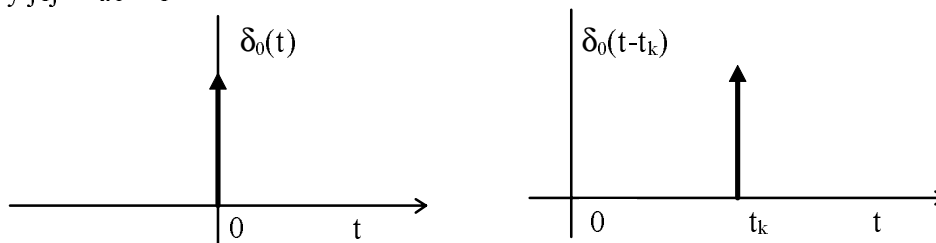
Jednotkový impuls (delta funkci) si můžeme představit jako limitní případ obdélníkového impulsu podle Obr. 1.1-10, jehož doba trvání $t_0 \rightarrow 0$ a jeho plocha $F_0 t_0 = 1$.



Obr. 1.1-10

Označujeme jej $\delta_0(t)$ a pokud je v čase posunutý, potom $\delta_0(t - t_k)$.

Symbolicky jej značíme



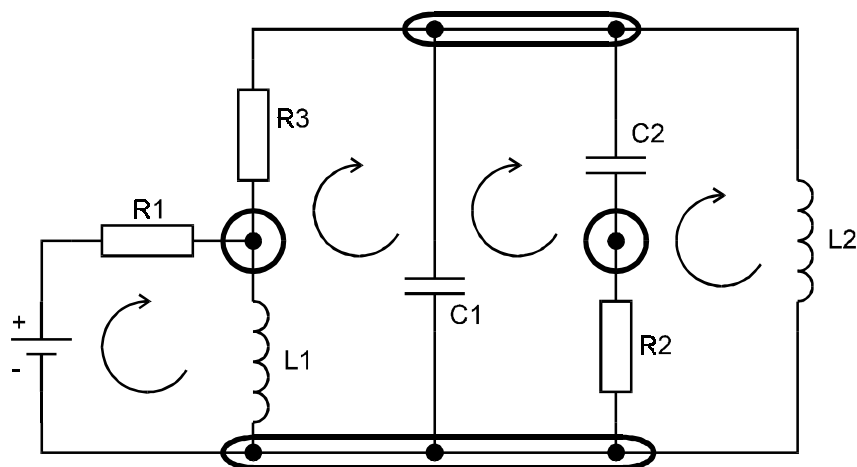
Obr. 1.1-11

Diracův impuls a jednotkový skok jsou nerealizovatelné průběhy, protože se mění skokově, což odporuje fyzikálním principům. Mají však jednoduché matematické vyjádření a můžeme se jim limitně přiblížit. Používáme je ke studiu přechodových dějů, při zkoumání soustav, které pracují s impulsními průběhy.

1.2 Zákony elektrických obvodů

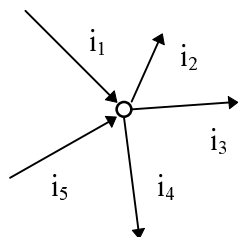
Elektrický obvod je tvořen spojením řady jednoduchých prvků - odporů, kapacitorů, induktorů nezávislých zdrojů, ale i prvků složitějších jako jsou tranzistory, transformátory, integrované obvody atd.

Styku prvků budeme říkat uzel. Několik prvků řazených za sebou může vytvořit uzavřený okruh (smyčku). Jako příklad obvodu může být tento :



Obr. 1.2-1

Uzel je spojení vodičů protékáných proudy. V případě 1. Kirchhoffova zákona, který tvrdí, že součet proudů vstupujících do uzlu je roven součtu proudů z uzlu vystupujících, platí



$$\sum_{j=1}^m i_j = 0 \quad (1.2.1)$$

přičemž proudy do uzlu vtékající budeme označovat jedním znaménkem a vytékající opačným. Označíme-li vtékající proudy - a vytékající +, můžeme napsat

$$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

Ale stejně tak dobře to můžeme obrátit a vtékající proudy označit + a vytékající - a dostaneme

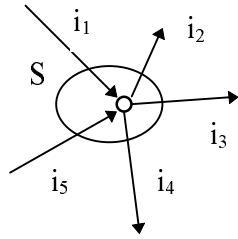
$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

což je tatáž rovnice.

První zákon je vlastně vyjádřením principu kontinuity pro elektrické obvody. Rovnice kontinuity pro elektrické obvody je matematickým vyjádřením zákona zachování náboje. Tento zákon vyjadřuje experimentálně ověřený poznatek, že náboj nikde nevzniká, ani však nezaniká. To znamená, že celkový náboj zcela izolované soustavy je konstantní - dá se dokázat, že tento zákon platí jak v makroskopickém, tak v mikroskopickém měřítku.

Uvažujme nějakou uzavřenou plochu S a necht' z této plochy vyteče náboj dq . Avšak o tento náboj / byl uzavřen plochou S / se zmenší původní náboj uzavřený v ploše S . Z této

úvahy plyne, že $-dq = i \cdot dt$. Z této úvahy plyne, že $i + \frac{dq}{dt} = 0$. Vyjádříme-li proud pomocí proudové hustoty J , dostaneme rovnici :



$$\oiint \vec{J} d\vec{S} + \frac{dq}{dt} = 0 \quad (1.2.2)$$

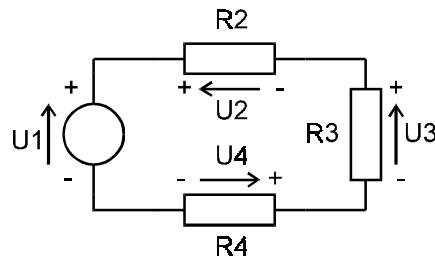
(Proud tekoucí plochou S + změna náboje s časem = 0)

Pozn.: Pro vodiče dq/dt ... děje se v časech $\tau_d = 10^{-15} - 10^{-13}$ s (dielektrická relaxační doba $\tau = \epsilon/\sigma$) a potom tedy platí

$$\oiint \vec{J} d\vec{S} = 0$$

Tento zákon platí ve všech sledovaných případech a je tedy obecný - pokud pracujeme v časové oblasti podstatně delších časů než je τ_d .

Nejčastěji elektrické obvody vytvářejí uzavřené dráhy, kudy se uzavírá proud zdrojů.



Obr.1.2-2

Značení není jednotné (raději šipky nebudeme užívat) a budeme psát + a -



Uvažujeme-li druhou Maxwellovu rovnici ve tvaru

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.2.3)$$

pro případ, kdy $d\Phi/dt \rightarrow 0$, můžeme psát

$$\sum_{i=1}^n u_i = 0 \quad (1.2.4)$$

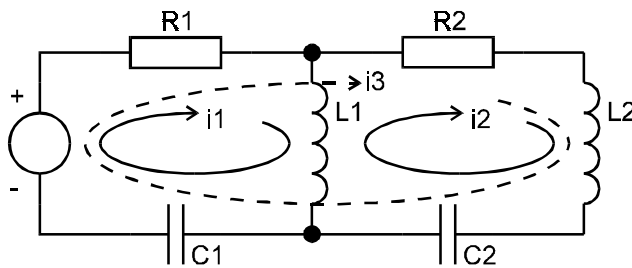
což je 2. Kirchhoffův zákon. Platnost je opět obecná pokud můžeme zanedbat změnu magnetického pole v obvodu.

Pro obvod podle Obr.1.2-2 můžeme tedy napsat

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

což nás vede k názoru, že Kirchhoffův druhý zákon platí obecně, ale je to jistá aproximace pro oblast nižších frekvencí.

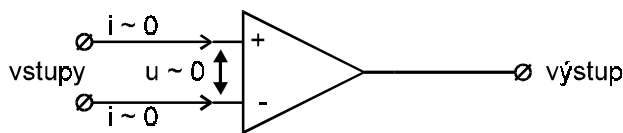
Smyčky můžeme vést různým způsobem, jak je naznačeno na Obr. 1.2-3 :



Obr. 1.2-3

Kirchhoffovy zákony platí bez ohledu jaký je vztah mezi napětím a proudem jednotlivých prvků, ať je lineární nebo nelineární. Znamená to, že platí jak v lineárních tak v nelineárních obvodech.

Uvedme nyní několik příkladů na Kirchhoffovy zákony - v těchto příkladech se bude vyskytovat tzv. operační zesilovač - zatím nás nezajímají jeho detailní vlastnosti, ani jak je vnitřně uspořádán - pro nás je to „černá krabice“ se schematickou značkou podle Obr. 1.2-4

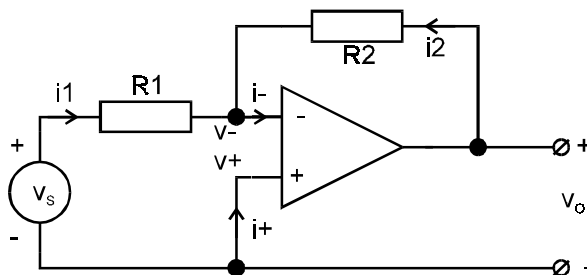


Obr. 1.2-4

Základní pravidla činnosti operačního zesilovače :

- a/ vstupy neodebírají žádný proud (10^{-8} až 10^{-12} A)
- b/ mezi vstupy není rozdíl napětí ($U \sim 10^{-6}$ až 10^{-5} V)

Zapojme operační zesilovač tímto způsobem



Obr. 1.2-5

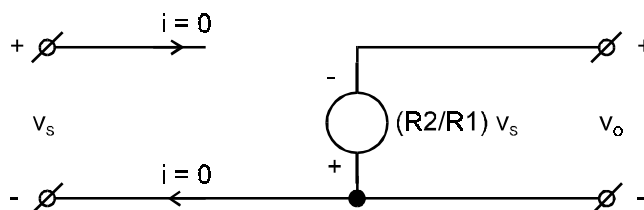
Podle 1. Kirchhoffova zákona $i_1 + i_2 - i^- = 0$. Na základě tohoto zákona pro rezistory můžeme psát

$$\frac{v_S - v^-}{R_1} + \frac{v_O - v^-}{R_2} = i^-$$

Ale $i^- = 0$ a $v^- = v^+ = 0$ čili

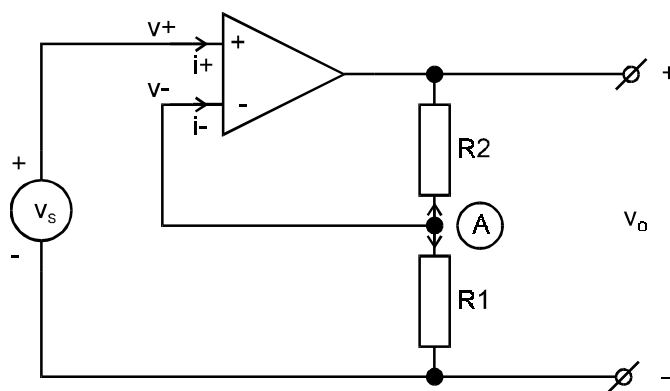
$$\frac{v_S}{R_1} + \frac{v_O}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_O = -\frac{R_2}{R_1} v_S \quad (1.2.5)$$

Výstupní energie je dodávána ss zdroji napájejícími operační zesilovač, nikoliv vstupním zdrojem. Abychom rovnici (1.2.5) mohli modelovat, zavedeme nový prvek - závislý zdroj podle Obr. 1.2-6 :



Obr. 1.2-6

Příklad : Máme zapojení s operačním zesilovačem



Obr. 1.2-7

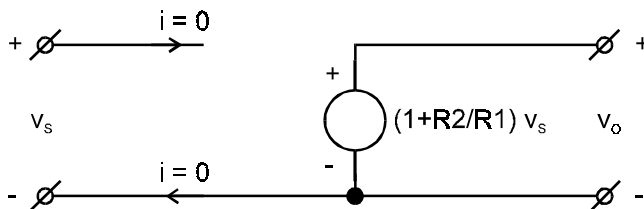
Označme proudy v uzlu A a napišme rovnice podle 1. Kirchhoffova zákona

$$i^- + \frac{v_S}{R_1} + \frac{v_S - v_O}{R_2} = 0$$

Ale $i^- = 0$, a proto

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_S \quad (1.2.6)$$

a mohu znovu modelovat tento stav pomocí závislého zdroje (řízeného zdroje)



Obr. 1.2-8

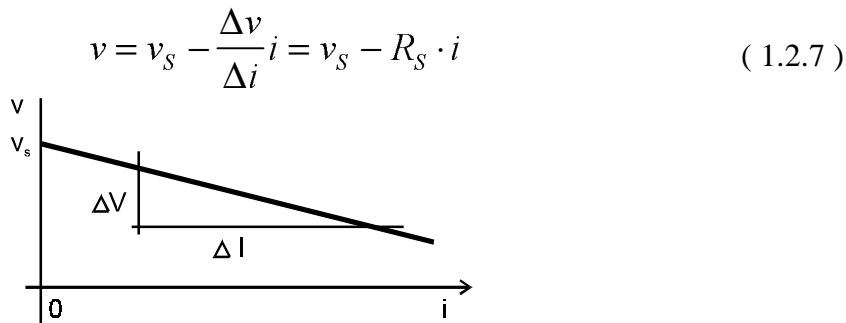
Jak to bude vypadat pro případ $R_1 \rightarrow \infty$ a $R_2 \rightarrow 0$.

V tomto případě bude

$$1 + \frac{R_2}{R_1} = 1 \quad v_o = v_s$$

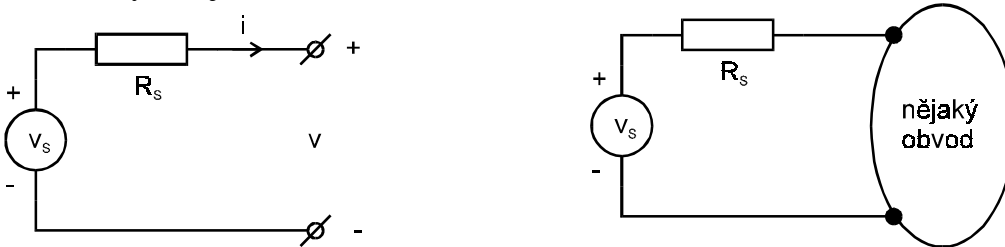
Tomuto obvodu říkáme napěťový sledovač.

Na první pohled se to zdá být nesmyslné, ale uvažujme následující situaci : Reálný zdroj signálu v_s bude mít tu vlastnost, že jeho svorkové napětí bude klesat se stoupajícím zatížením čili odebíraným proudem. Situace bude tedy podle Obr. 1.2-9. Pokud bude závislost lineární, mohu psát :



Obr. 1.2-9

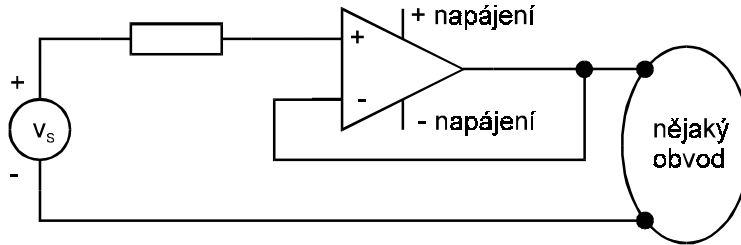
a modelovat reálný zdroj tímto



Obr. 1.2-10

Potom mějme zapojení podle Obr. 1.2-10 . V tomto případě veškerá energie tekoucí do „nějakého obvodu“ pochází ze zdroje v_s .

Uvažujme druhý případ, kdy použijeme napětěového sledovače a máme situaci podle obrázku



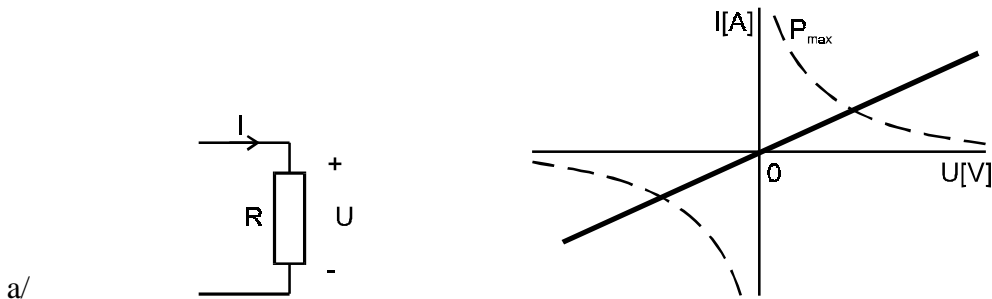
Obr. 1.2-11

Energie dodávaná do „nějakého obvodu“ v tomto případě nepochází ze zdroje v_s (třeba potřebnou energii není schopen dodat), ale je dodávána v důsledku působení našeho operačního zesilovače - / viz $i^+ = i^- = 0$ / ; dodávají ji napájecí zdroje zesilovače. Tomuto zapojení můžeme říkat oddělovací zesilovač / v angličtině Buffer Amplifier / , protože je schopen vlastně izolovat jeden obvod od druhého.

1.3 Prvky obvodů pasivního typu

1.3.1 Rezistor

Rezistor je prvek, jehož závislost proudu na napětí prochází počátkem souřadnic - nazýváme ji voltampérovou charakteristikou. Mohou nastat tři případy :



Obr. 1.3-1

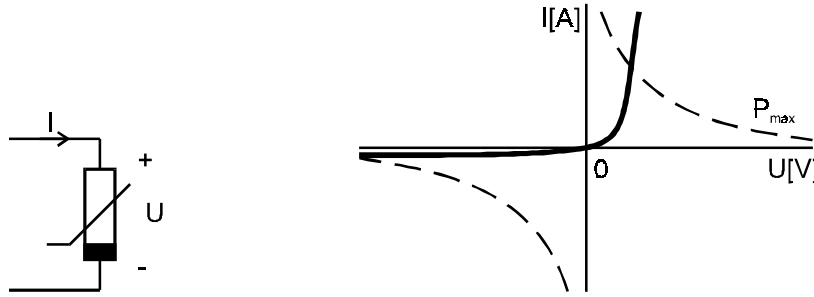
V tomto případě platí $U = R \cdot I$ / $I = G \cdot U$ /. Jedná se o lineární rezistor (přesně to tak nikdy nevypadá - teplotní vlivy, výkonový efekt $P = U \cdot I$) . Mohu ho zapojit do obvodu - záměna svorek nemá vliv.



Obr. 1.3-2

Je to tzv. nelineární rezistor. Záměna svorek opět nemá vliv, neboť se jedná o symetrickou závislost voltampérové charakteristiky.

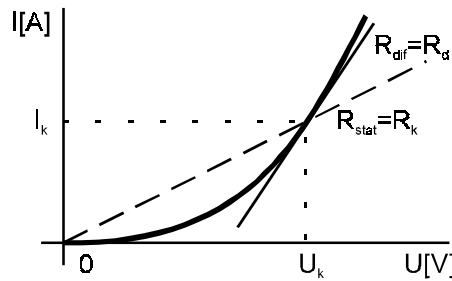
c/



Obr. 1.3-3

V tomto případě už ovšem bude záležet na tom, jak je prvek zapojen do obvodu.

V prvním případě bylo jednoduché charakterizovat tento prvek. Platilo $U = R \cdot I$ nebo $I = G \cdot U$, kde R je konstanta charakterizující prvek. Vodivost G je převrácenou hodnotou odporu R . V případě nelineárních rezistorů to už tak jednoduché není, tady můžeme definovat odpory dva: 1/ Statický odpor a 2/ Diferenciální odpor.

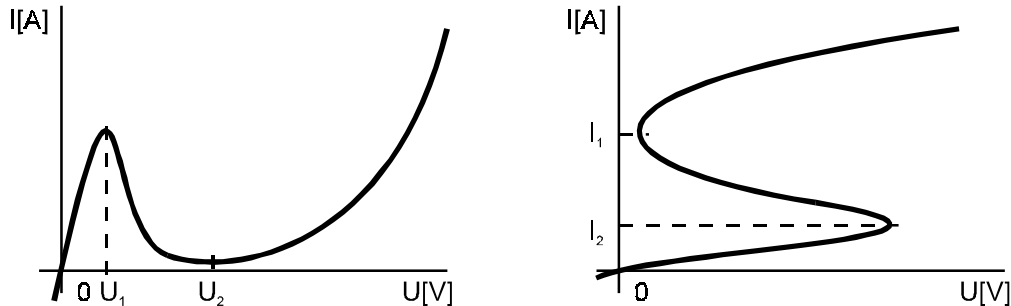


Obr. 1.3-4

Statický odpor můžeme definovat jako poměr klidového napětí a proudu U_k ; I_k čili $R_k = U_k / I_k$. Přejdeme-li k limitním hodnotám, dostaneme diferenciální odpor

$$R_d = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI} \quad (1.3.1)$$

Budou-li charakteristiky prvků monotónními funkcemi, bude diferenciální odpor vždy kladný. V elektronice mohou však nastat i případy jiné, ať již v důsledku působení fyzikálních mechanismů / tunelový jev, lavinový jev, sekundární emise atd. / nebo obvodových / viz zpětná vazba atd. / . V těchto případech mohou mít voltampérové charakteristiky složitější charakter.



Obr. 1.3-5

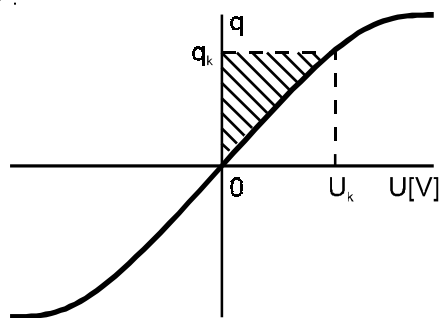
U těchto prvků jsou v rozmezí (u_1 , u_2) a (i_1 , i_2) diferenciální odpory záporné. / První případ odpovídá tunelové diodě, Gunnově diodě atd. zatímco druhý diaku, tyristoru, triaku apod.

1.3.2 Kapacitor

V nízkofrekvenční aproximaci je kapacitor základní pasivní prvek, který má schopnost hromadit energii / elektrické pole ; magnetické zanedbáváme /.

Symbol kapacitoru : 

Obecně to bude vypadat takto :



Obr. 1.3-6

Charakteristika kapacitoru - tentokrát voltcoulombová prochází opět pouze prvním a třetím kvadrantem.

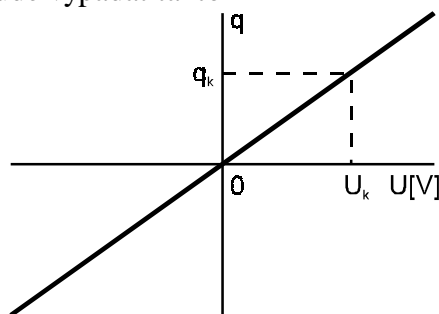
Pro práci můžeme psát $dW = U \cdot dq$, ale $dq = i \cdot dt$ čili za dobu od t_1 do t_2 se nahromadí energie :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} U \cdot I \, dt \quad \text{nebo} \quad W = \int_{q(t_1)}^{q(t_2)} U(q) \, dq$$

Bude-li $q(t_1) = 0$, bude tato energie rovna vyšrafované ploše na Obr. 1.3-6.

$$W_k = \int_0^{q_k} U(q) \, dq \quad (1.3.2)$$

Bude-li kapacitor lineární, což znamená, že bude platit lineární závislost mezi nábojem a napětím $Q = C \cdot U$, pak to bude vypadat takto



Obr. 1.3-7

a pro energii dostaneme

$$W = \int_0^{q(t)} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C} q^2(t) = \frac{1}{2} CU^2(t) \quad (1.3.3)$$

Bude-li kapacitor nelineární / např. polovodičová dioda v inverzním zapojení / , můžeme stejně jako u rezistoru rozlišovat statickou a diferenciální hodnotu.

Vztah mezi napětím na svorkách kapacitoru a proudem bude :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad q = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau + \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$q = q(0) + \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (1.3.4)$$


Bude-li kapacitor lineární, bude $q = C \cdot U$ čili

$$\frac{dq}{dt} = i = C \frac{dU}{dt} \quad q = CU = CU(0) + \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (1.3.5)$$

$$U = U(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (1.3.6)$$

1.3.3 Indukčnost

Indukčnost je z fyzikálního hlediska prvek, v němž dominuje magnetické pole a elektrické pole můžeme zanedbat.

Symbol indukčnosti : 

Postup popisu může být obdobný jako u kapacitoru. V případě lineární indukčnosti bychom odvodili, že je to opět prvek schopný hromadit energii a tato energie je dána vztahem

$$W_L = \frac{1}{2} LI^2 \quad (1.3.7)$$

Protože

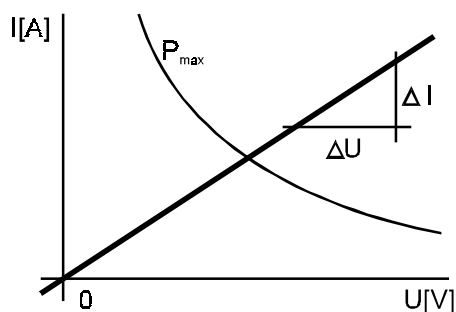
$$\Phi = LI \quad U = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (1.3.8)$$

nebo

$$I = I(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt \quad (1.3.9)$$

a stejně tak můžeme hovořit o nelineární a diferenciální indukčnosti .

Celá řada prvků, zejména rezistorů a kapacitorů se vyrábí a jsou běžně dostupné. Rezistory jsou charakterizovány svojí ohmickou hodnotou a přípustným výkonovým zatížením.

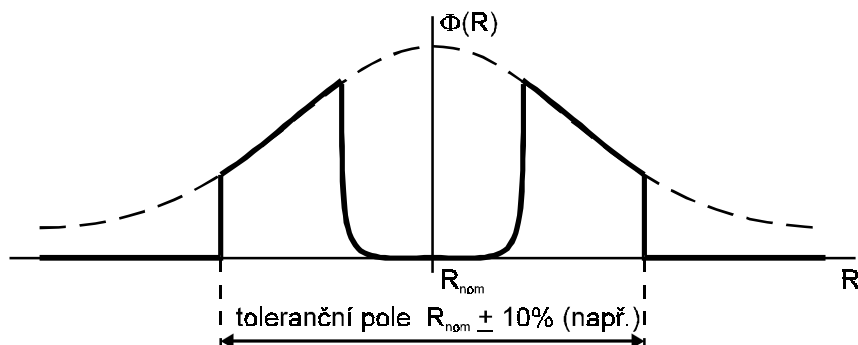


Obr. 1.3-8

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (1.3.10)$$

Nominální ohmické hodnoty jsou voleny podle řad normálních hodnot. Např. 20% řada vypadá takto : 1 1,5 2,2 3,3 4,7 6,8 10 .

Rozdělení hodnot by mělo být podle Gaussova zákona, ale v důsledku výběru přesnějších hodnot (2% , 5%) to vypadá takto - Obr. 1.3-9



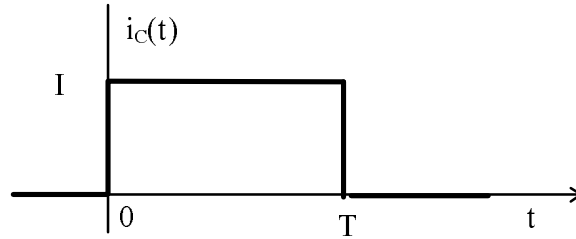
Obr. 1.3-9

Rozložení standardních hodnot vyplývá z toho, aby byla zajištěna relativně levná produkce. Mějme např. rezistor s nominální hodnotou uvedenou číselně $1500 \Omega \pm 20\%$ a nejbližší k němu rezistor $2200 \Omega \pm 20\%$. Potom se mohou v prvním případě vyskytovat rezistory $1500 \pm 300 \Omega$ a v druhém případě $2200 \pm 440 \Omega$.

Rovněž i kapacitory jsou pro potřeby elektroniky a elektrotechniky vyráběny hromadně podobně jako rezistory v řadách normálních hodnot. Jejich důležitými parametry jsou nominální hodnota a její tolerance, maximální přípustné napětí, ale i provedení tj. tvar a užití dielektrikum, jehož parametry rozhodují o frekvenčním rozsahu, v němž takové kapacitory lze použít. S výjimkou tzv. elektrolytických kapacitorů nezáleží na polaritě přiloženého napětí.

V případě rezistoru platilo $U = R \cdot I$, a proto napětí a proud měly stejný charakter a konstantou úměrnosti mezi nimi byla velikost odporu. V případě kapacitoru a induktoru - lineárních - jsou vztahy složitější - na základě derivace a integrace. Protože však vztahy mezi napětím a proudem na těchto prvcích schopných hromadit energii hrají obrovskou roli v elektrotechnice a elektronice, probereme dále na několika příkladech tyto poměry. Později se budeme na tyto výsledky odvolávat při studiu složitějších obvodů.

Příklad : Mám kapacitor, který na začátku není nabit a teče jím proud tohoto časového průběhu - Obr. 1.3-10



Obr. 1.3-10

Potom platí

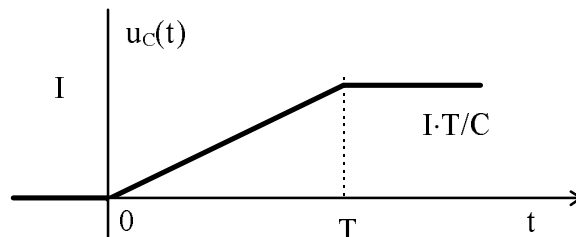
$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t I dt$$

$$u_C(t) = \frac{I \cdot t}{C} \quad \text{a v čase } t = T \text{ bude} \quad u_C(T) = \frac{I \cdot T}{C}$$

Pro čas $t > T$ platí $u_C(t) = u_C(T) + \frac{1}{C} \int_T^t i_C(\tau) d\tau \quad i_C(t) = 0$

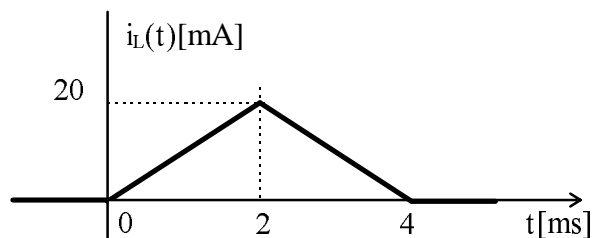
a proto $u_C(t) = u_C(T) = \frac{I \cdot T}{C}$

a bude to vypadat takto



Obr. 1.3-11

Příklad : Proud tekoucí indukčností 10 mH má časový průběh podle Obr. 1.3-12 - určete napětí na indukčnosti



Obr. 1.3-12

Lehko odvodíme, že platí

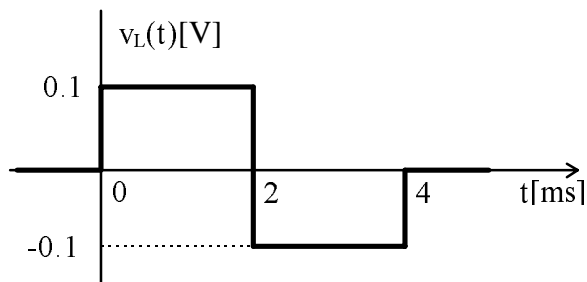
$$i_L(t) = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} t \quad \text{pro } 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

$$i(t) = -\frac{20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} t + 40 \cdot 10^{-3} \quad \text{pro } 2 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms}$$

v podstatě to ale ani nepotřebujeme pro výpočet

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 100 \cdot 10^{-3} = 0,1 \text{ V} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

$$v_L(t) = 10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{-20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = -0,1 \text{ V} \quad 2 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms}$$



Obr. 1.3-13

1.4 Řešení lineárních obvodů v časové oblasti

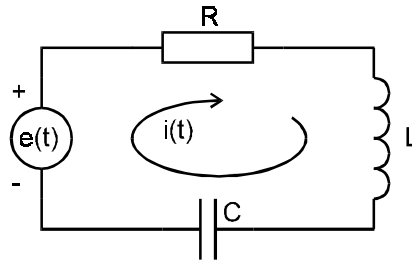
Z výše uvedených závislostí pro několik případů vyplývá, že napětí a proud na prvcích schopných hromadit energii má odlišný charakter derivace nebo integrálu. Toho můžeme využít např. kdybychom chtěli generovat napěťový průběh lineárně se měnící s časem - budeme tedy nabíjet kapacitor konstantním proudem.

To co bylo řečeno nám dává i odpověď na otázku jak postupovat při psaní rovnic podle Kirchhoffových zákonů v případě obecného časového průběhu $v(t)$ nebo $i(t)$.

V případě stejnosměrného proudu nebo napětí jsme mohli uvažovat pouze rezistory obvodu a prvky schopné hromadit energii zanedbat, to znamená kapacitory vynechat a indukčnosti nahradit zkratem. V případě lineárního obvodu jsme dostali pro popis soustavu lineárních algebraických rovnic a v případě, že se v obvodu vyskytovaly nelineární rezistory, soustavu nelineárních rovnic.

V případě obecného budícího signálu $e(t)$ nebo $i(t)$ to bude soustava integrodiferenciálních rovnic, kterou můžeme převést na soustavu rovnic diferenciálních.

Mějme obvod dle Obr. 1.4-1



Obr. 1.4-1

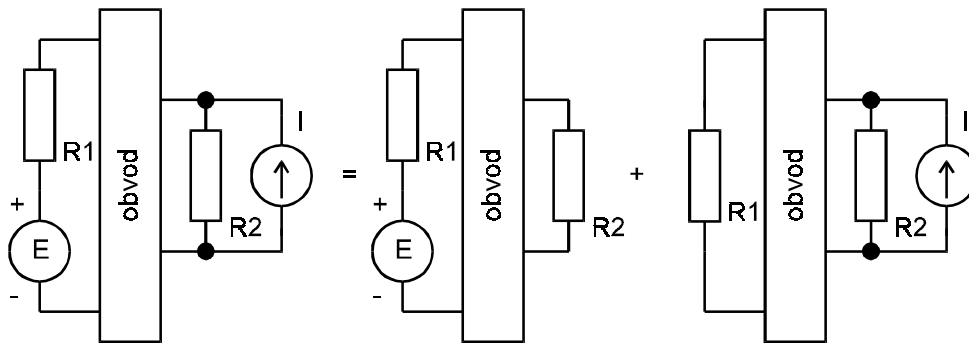
Potom můžeme dle 2. Kirchhoffova zákona psát rovnici

$$e(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

a převést derivováním tuto rovnici na rovnici diferenciální.

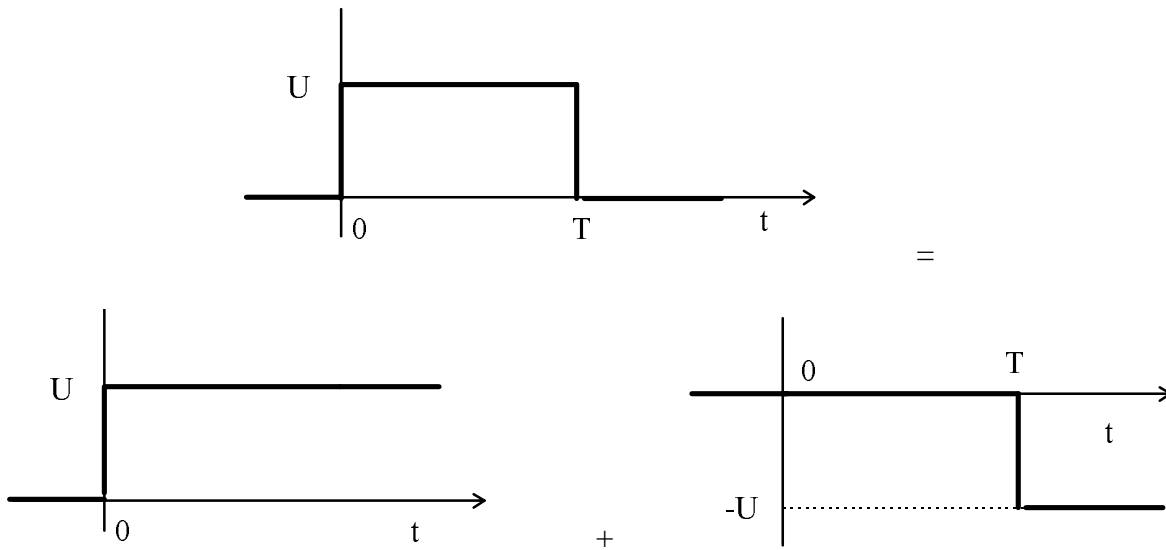
Nás však více než řešení nějakých obvodů zajímá jak tomu bude v případě, že v lineárním obvodu bude působit více signálů. Derivace a integrace jsou operace lineární - derivace či integrace součtu dvou funkcí je součtem derivací či integrací dílčích funkcí - a proto platí v lineárních obvodech tzv. princip superpozice, což je obecný fyzikální princip platný tam, kde mezi příčinou a následkem je lineární vztah.

Na základě tohoto principu platí, že účinek součtu příčin se rovná součtu účinků jednotlivých příčin působících samostatně. Pokud by v lineárním obvodu působilo několik nezávislých zdrojů, můžeme napětí a proudy určovat jako součty příslušných napětí a proudů vyvolaných jednotlivými zdroji samostatně / řízené zdroje musíme ponechat, ideální zdroj napětí nahradíme zkratem, ideální zdroj proudu odpojíme /.



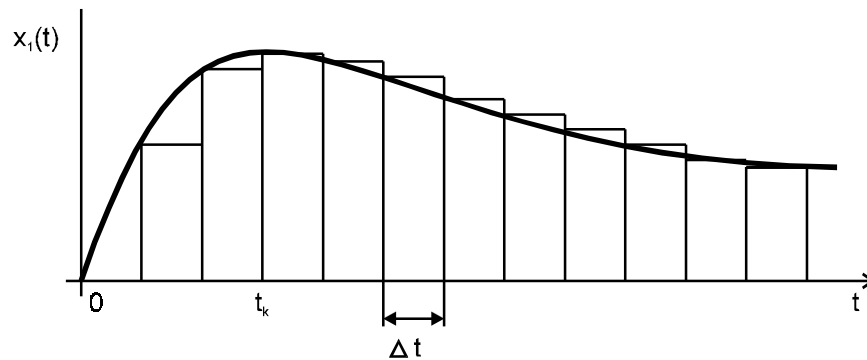
Obr. 1.4-2

Princip superpozice můžeme využít i jinak, a to v případech kdy máme nějaký složitější signál a tento signál mohu považovat za součet jednodušších signálů / např. Obr. 1.4-3 / .



Obr. 1.4-3

Pokud bychom např. znali odezvu obvodu na jednotkový impuls / delta funkci / - nazvěme tuto odezvu $w(t)$, můžeme složitý signál vytvořit jako součet jednotkových impulsů - viz Obr. 1.4-4 .



Obr. 1.4-4

Potom platí

$$\Delta x_2(t) \cong x_1(t_k) \cdot \Delta t \cdot w(t - t_k)$$

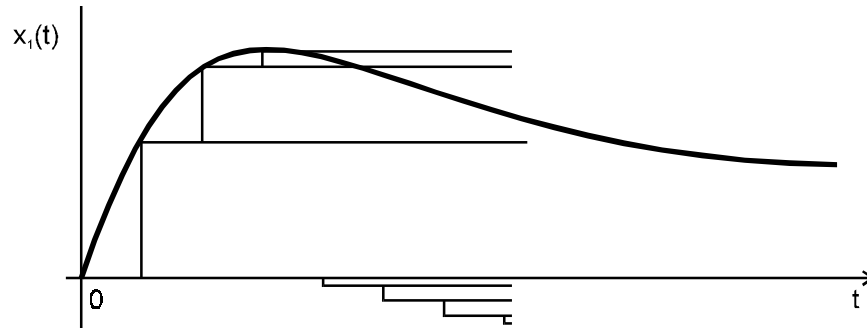
Celková odezva obvodu je dána součtem odezev, a proto

$$x_2(t) = \sum_{k=1}^n x_1(t_k) \cdot \Delta t \cdot w(t - t_k) \quad (1.4.1)$$

V limitě přechází tento součet na konvoluční integrál

$$x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) \cdot w(t - \tau) d\tau \quad (1.4.2)$$

Podobně bychom mohli skládat signál nikoliv z jednotlivých impulsů, ale z jednotkových skoků



Obr. 1.4-5

a dostali bychom tzv. Duhamelův integrál. Bude-li totiž odezva na jednotkový skok $k(t)$, dostaneme

$$x_2(t) = x_1(0) \cdot k(t) + \int_0^t x_1'(\tau) \cdot k(t - \tau) d\tau$$

$$x_2(t) = x_1(0) \cdot k(t) + \int_0^t x_1'(t - \tau) \cdot k(\tau) d\tau$$

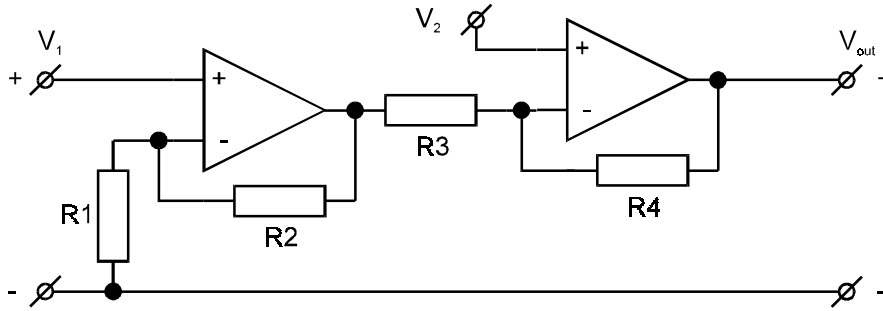
$$x_2(t) = x_1(0) \cdot x_1(t) + \int_0^t x_1(\tau) \cdot k'(t - \tau) d\tau$$

$$x_2(t) = x_1(0) \cdot x_1(t) + \int_0^t x_1(t - \tau) \cdot k'(\tau) d\tau \quad (1.4.3)$$

Podle těchto vztahů tedy můžeme počítat odezvu na libovolný signál za předpokladu, že obvod je lineární a že máme buď $w(t)$ nebo $k(t)$, nebo je umíme jednoduše určit. Jiná je ovšem otázka, zda vůbec pro složitější signály vypočteme příslušné integrály.

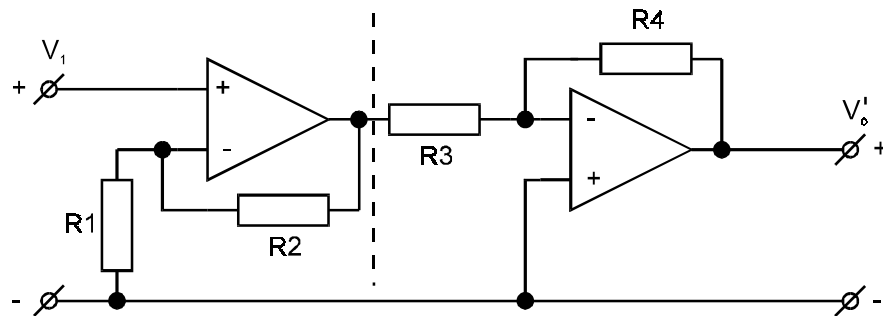
Složitější signály můžeme však skládat i z jiných časových průběhů jak uvidíme později a bude to mít i jisté výhody.

Příklad na superpozici - nalezněte V_{out} pro obvod podle Obr. 1.4-6



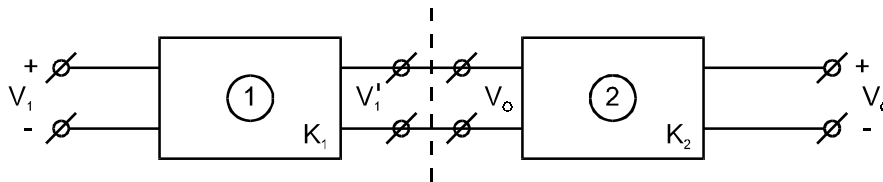
Obr. 1.4-6

Obvod obsahuje dva nezávislé zdroje V_1 a V_2 . Řešme nejprve pro V_1 (to znamená, že svorku V_2 spojíme s nulovým - společným potenciálem) a dostaneme obvod



Obr. 1.4-7

Máme dva obvody v kaskádě čili problém tento



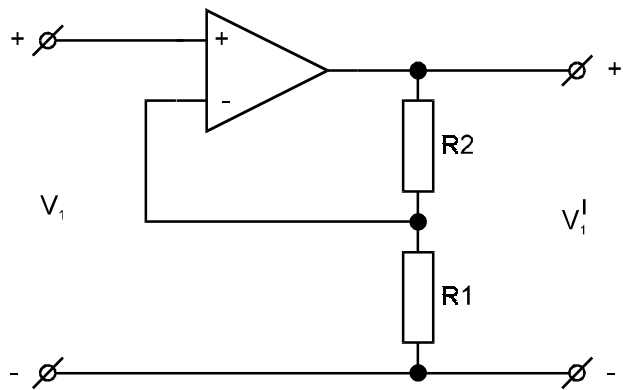
Obr. 1.4-8

Pokud připojení obvodu 1 k obvodu 2 nezmění vlastnosti samostatně uvažovaných obvodů 1 a 2, můžeme psát

$$\frac{V'_1}{V_1} = K_1 \quad \frac{V'_0}{V'_1} = K_2 \quad \frac{V'_0}{V_1} = K_1 \cdot K_2$$

ale $V'_1 = V_0$ a proto $\frac{V'_0}{V_1} = K_1 \cdot K_2$

čili důležitý poznatek pro kaskádně spojené obvody. Mohu tedy za předpokladu nezávislosti stanovit dílčí výsledky a celkový obvod dostat jako součin těchto dílčích výsledků. Ale dílčí výsledky jsme již zde měli a pro zapojení podle Obr. 1.4-9

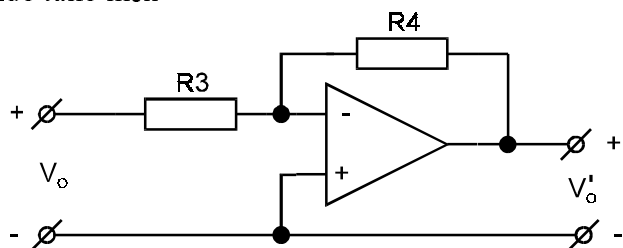


Obr. 1.4-9

jsme ustanovili

$$V_1' = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot V_1$$

Druhý obvod jsme již zde také měli

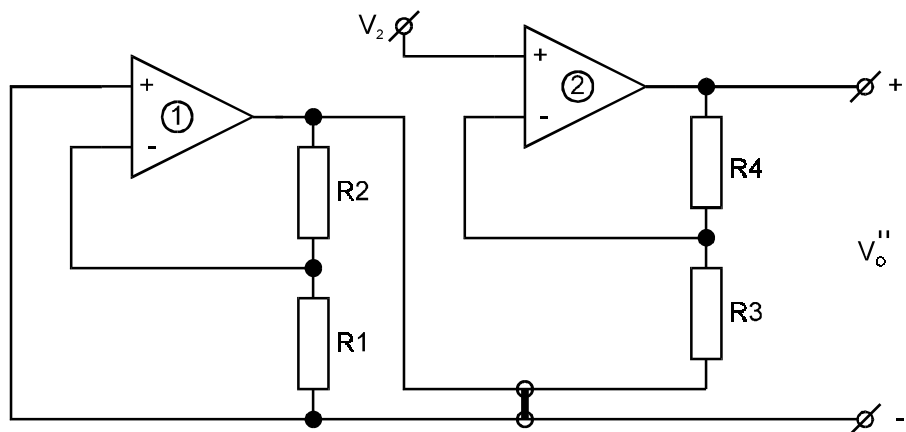


Obr. 1.4-10

a ustanovili jsme, že platí $V_0' = -\frac{R_4}{R_3} \cdot V_0$. Potom tedy první dílčí výsledek je

$$V_0' = -\frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot V_1$$

Řešme nyní obvod pro V_2 , a to znamená obvod



Obr. 1.4-11

Na vstupu obvodu 1 je nulové napětí, a proto je i nulové napětí na jeho výstupu, proto si můžeme představit výstup obvodu uzemněn jak je naznačeno. Potom nám zbývá známý obvod, pro který máme výsledek

$$V_0'' = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \cdot V_2$$

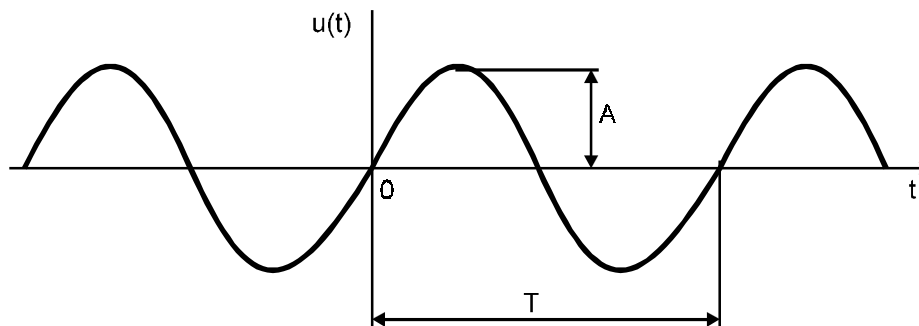
Hledaný výsledek tedy bude

$$V_0 = V_0' + V_0'' = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot V_1 + \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \cdot V_2$$

1.5 Ustálený harmonický režim

Velmi často se vyskytují v elektrických obvodech zdroje, které dodávají čistě harmonický signál

$$u(t) = A \cdot \sin \omega t \quad \text{kde} \quad \omega = 2\pi f \quad \text{a} \quad f = 1/T \quad (1.5.1)$$



Obr. 1.5-1

Shodli jsme se na tom, že v případě obecného signálu budeme na základě Kirchhoffových zákonů popisovat obvody diferenciální rovnicí nebo soustavou diferenciálních rovnic a že v případě lineárních obvodů to budou lineární diferenciální rovnice a jejich soustavy. Na pravé straně těchto rovnic se budou vyskytovat průběhy / signály / nezávislých zdrojů zapojených v příslušném obvodu. Na levé straně to pak budou příslušné derivace a konstantní členy vyplývající z toho, že např. pro kapacitor / lineární / platí

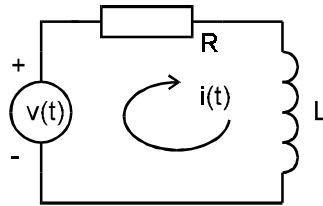
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) \, d\tau = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) \, d\tau \quad (1.5.2)$$

a podobně pro proud lineární indukčnosti

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) \, d\tau \quad (1.5.3)$$

Řešení diferenciální rovnice je dáno superpozicí komplementární funkce a partikulárního integrálu čili $\chi(t) = \chi_p(t) + \chi_c(t)$, kde $\chi_p(t)$ je řešení úplné rovnice s pravou stranou a $\chi_c(t)$ je řešení homogenní rovnice. Z našeho hlediska lze říci, že $\chi_p(t)$ odpovídá působení vnějšího zdroje a tedy popisuje režim, který tento zdroj v obvodu vynucuje v ustáleném stavu a $\chi_c(t)$ odpovídá přechodovým procesům v důsledku vnitřních podmínek obvodu daných počátečními náboji /i napětím/ kapacit $u_C(0)$ a počátečními proudy indukčnostmi $i_L(0)$.

Vraťme se nyní k našemu případu čistě harmonických zdrojů a uvažujme jednoduchý obvod



Obr. 1.5-2

a chceme určit ustálený proud $i(t)$. Bude-li $v(t) = V_M \cos \omega t$ pak podle 2. Kirchhoffova zákona platí rovnice

$$L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = V_M \cos \omega t$$

Ustálený proud v lineárním obvodu bude mít opět harmonický průběh a můžeme ho obecně psát

$$i(t) = A \cdot \cos(\omega t + \Phi)$$

což je možné též napsat

$$i(t) = A \cdot \cos \Phi \cdot \cos \omega t - A \cdot \sin \Phi \cdot \sin \omega t = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

a dosadíme do diferenciální rovnice a poté provedeme-li derivaci, dostaneme

$$-A_1 L \omega \cdot \sin \omega t + A_2 L \omega \cdot \cos \omega t + A_1 R \cdot \cos \omega t + A_2 R \cdot \sin \omega t = V_M \cos \omega t$$

takže

$$-A_1 L \omega + A_2 R = 0 \qquad A_2 L \omega + A_2 R = V_M$$

což jsou dvě rovnice pro neznámé A_1 a A_2 a jejich výpočtem dostaneme

$$A_1 = \frac{R \cdot V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad A_2 = \frac{\omega L \cdot V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

čili

$$i(t) = \frac{R \cdot V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L \cdot V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

a budeme-li to chtít převést na tvar

$$i(t) = A \cdot \cos(\omega t + \Phi)$$

určíme, že

$$A \cdot \cos \Phi = \frac{R \cdot V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad A \cdot \sin \Phi = \frac{-\omega L \cdot V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

takže podělíme-li

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{A \cdot \sin \Phi}{A \cdot \cos \Phi} = -\frac{\omega L}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = -\operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$$

a dále

$$(A \cos \Phi)^2 + (A \sin \Phi)^2 = \frac{R^2 V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{\omega^2 L^2 \cdot V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = A^2$$

$$A = \frac{V_M^2 (R^2 + \omega^2 L^2)}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

čili konečné řešení je

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}\right)$$

Jednoduchý obvod a poměrně zdlouhavý výpočet. Nevýhodou je to, že musíme řešit diferenciální rovnici a hlavně nám situaci komplikuje užívání goniometrických vztahů. Abychom se tomu vyhnuli, uvažujme Eulerův vztah

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \qquad (1.5.4)$$

čili

$$\operatorname{Re}\left(e^{j\omega t}\right) = \cos \omega t \qquad \operatorname{Im}\left(e^{j\omega t}\right) = \sin \omega t \qquad (1.5.5)$$

Vezmeme-li v úvahu, že náš zdroj bude dodávat / nerealizovatelný / signál

$$v(t) = V_M \cdot e^{j\omega t} \qquad \text{což je} \qquad v(t) = V_M \cdot \cos \omega t + j V_M \cdot \sin \omega t$$

Můžeme uvažovat (protože platí princip superpozice), že

$$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \Phi) + j I_M \cdot \sin(\omega t + \Phi)$$

a celý výpočet provést pro

$$v(t) = V_M \cdot e^{j\omega t}$$

a na konci vzít pouze reálnou část. Pro stejný případ jako předešle to znamená, že

$$i(t) = I_M \cdot e^{j(\omega t + \Phi)}$$

kde neznáme I_M a Φ , a proto opět dosadíme do diferenciální rovnice

$$L \frac{di}{dt} I_M \cdot e^{j(\omega t + \Phi)} + R I_M \cdot e^{j(\omega t + \Phi)} = V_M \cdot e^{j\omega t}$$

poté provedeme derivaci a upravíme rovnici

$$j\omega L I_M \cdot e^{j\Phi} + R I_M \cdot e^{j\Phi} = V_M \quad \text{neboli} \quad I_M \cdot e^{j\Phi} = \frac{V_M}{R + j\omega L}$$

Přepíšeme-li toto do polárního tvaru, dostáváme

$$I_M \cdot e^{j\Phi} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(-\arctg(\omega L / R))}$$

a porovnáním

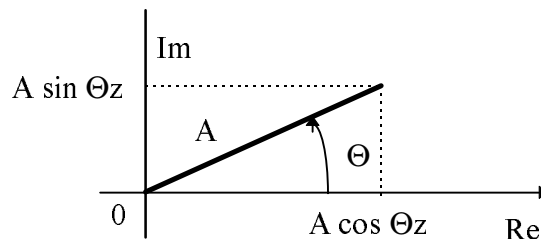
$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \Phi = -\arctg \frac{\omega L}{R}$$

takže

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right)$$

což je stejný výsledek jako dříve.

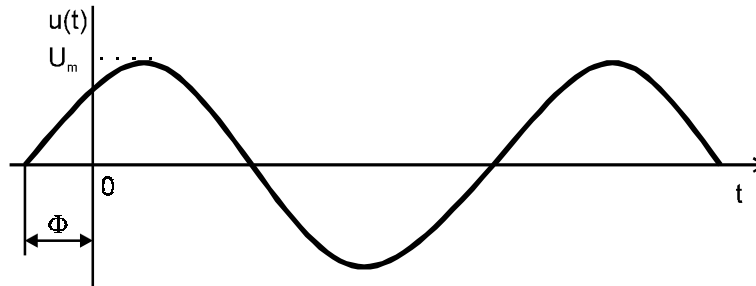
Komplexní číslo $z = a + jb$ mohou vyznačit v komplexní rovině - viz Obr. 1.5-3



Obr. 1.5-3

$$z = a + jb = A \cos \Theta + j \sin \Theta = A \cdot e^{j\Theta}$$

Bude-li $\Theta = \omega t$, pak z je „vektor“ - fázor, otáčející se úhlovou rychlostí ω a vytvářející svým průmětem do imaginární osy funkci $A \sin \omega t$ a průmětem do reálné osy funkci $A \cos \omega t$. Obecně nemusí pro čas $t = 0$ procházet průběh nulou - může být fázově posunut



Obr. 1.5-4

což mohu vyjádřit vztahem

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \Phi) = \text{Im} \left[U_M e^{j(\omega t + \Phi)} \right]$$

kde

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$

a pokud bychom měli

$$u(t) = U_M \cos(\omega t + \Phi) = \text{Re} \left[U_M e^{j(\omega t + \Phi)} \right]$$

a nazveme-li

$$U_M \cdot e^{j\Phi} = \hat{U}_M$$

můžeme psát

$$U_M \sin(\omega t + \Phi) = \text{Im} \left[\hat{U}_M e^{j\omega t} \right] \qquad U_M \cos(\omega t + \Phi) = \text{Re} \left[\hat{U}_M e^{j\omega t} \right]$$

$\hat{U}_M e^{j\omega t}$ je „vektor“ - fázor otáčející se úhlovou rychlostí ω a v nulovém čase svírá s reálnou osou úhel ϕ . Kdybychom uvažovali obvod, který jsme řešili a který je popsán diferenciální rovnicí

$$L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = V_M \cos \omega t$$

a časové průběhy nahradili fázory $\hat{V}_M \cdot e^{j\omega t}$, můžeme psát

$$L \frac{d}{dt} \hat{I} \cdot e^{j\omega t} + R \hat{I} \cdot e^{j\omega t} = \hat{V}_M \cdot e^{j\omega t}$$

$$j\omega L\hat{I} + R\hat{I} = \hat{V}_M \quad \hat{I} = \frac{\hat{V}_M}{j\omega L + R}$$

a opět bychom dostali

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right)$$

Viděli jsme, že na lineárním rezistoru je vztah mezi proudem a napětím dán algebraickým vztahem

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{nebo} \quad U = R \cdot I \quad \text{čili také} \quad u(t) = R \cdot i(t) \quad (1.5.6)$$

Předpokládejme působení komplexního napětí $U_M \cdot e^{j(\omega t + \Phi_V)}$, které vyvolá

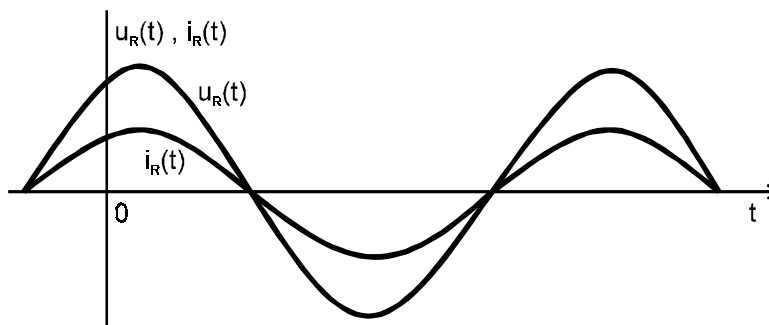
komplexní proud $I_M \cdot e^{j(\omega t + \Phi_i)}$

$$U_M \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\Phi_V} = R \cdot I_M \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\Phi_i}$$

čili

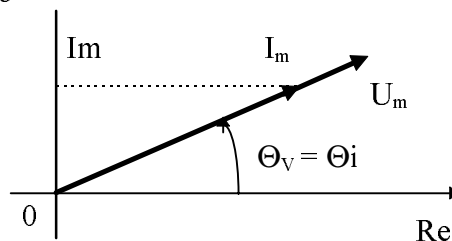
$$\hat{U} = R \cdot \hat{I} \quad , \quad \text{kde} \quad \hat{U} = U_M \cdot e^{j\Phi_V} \quad \hat{I} = I_M \cdot e^{j\Phi_i}$$

Aby však rovnice platila, musí být $\Phi_V = \Phi_i$, což znamená, že napětí a proud budou ve fázi. Časově to tedy bude vypadat



Obr. 1.5-5

Fázově to bude vypadat takto



Obr. 1.5-6

Pozn.: Fázory mohou psát též zjednodušeně takto :

$$\text{Časová doména} - \quad A \cos(\omega t \pm \Phi) \quad A \sin(\omega t \pm \Phi)$$

$$\text{Frekvenční doména} - \quad A \angle \pm \Phi \quad A \angle \pm \Phi - 90^\circ$$

Pro prvky typu induktor a kapacitor budeme potřebovat časovou derivaci a integraci

$$\frac{d}{dt} \hat{U}_M \cdot e^{j\omega t} = j\omega \hat{U}_M \cdot e^{j\omega t}$$

a nazvu-li

$$\hat{U}_M \cdot e^{j\omega t} = \hat{U} \quad \text{platí} \quad \frac{d\hat{U}}{dt} = j\omega \hat{U}$$

/ Není bezpodmínečně nutné uvažovat a počítat s maximální hodnotou U_m - stejně tak můžeme pracovat s hodnotou, která je s U_m pevně spojená např. s hodnotou efektivní U_{ef} ; platí $U_m = U_{ef} \sqrt{2}$ /

Budeme-li mít lineární kapacitor, pro který platí $q = C \cdot u$, bude

$$\frac{dq}{dt} = i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

čili bude platit

$$I \cdot e^{j(\omega t + \Phi)} = C \frac{d}{dt} U \cdot e^{j(\omega t + \Psi)}$$

$$I = j\omega C U \quad \text{pro} \quad \Psi = \Phi$$

Podobně pro indukčnosti

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$U_M \cdot e^{j(\omega t + \Phi)} = L \frac{d}{dt} I_M \cdot e^{j(\omega t + \Psi)}$$

$$U_M = j\omega L I_M \quad \text{pro} \quad \Psi = \Phi$$

$$U_{ef} \cdot \sqrt{2} = j\omega L I_{ef} \cdot \sqrt{2}$$

Porovnáme-li naše výsledky s Ohmovým zákonem pro lineární prvky / $I = U/R$ / , vidíme, že pro kapacitor platí

$$I = \frac{U}{1/j\omega C} \quad (1.5.7)$$

a nazveme-li konstantu úměrnosti impedancí, bude impedance kapacitoru rovna

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (1.5.8)$$

V případě indukčnosti tomu bude podobně

$$I = \frac{U}{j\omega L} \quad Z_L = j\omega L \quad (1.5.9)$$

Shrňme si naše poznatky

Rezistor	$u(t) = R \cdot i(t)$ $i(t) = G \cdot u(t)$	$U = R \cdot I$ $I = G \cdot U$	(1.5.10)
Kapacitor	$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$ $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$U = \frac{1}{j\omega C} I$ $I = j\omega C U$	(1.5.11)
Induktor	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt$	$U = j\omega L I$ $I = \frac{1}{j\omega L} U$	(1.5.12)

Uvažujme opět induktor ; zde platí

$$Z_L = j\omega L \quad U_L = j\omega L I$$

/ Máme-li dvě komplexní čísla

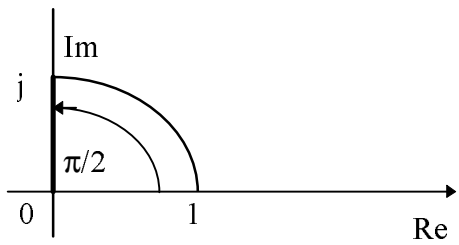
$$z_1 = A_1 e^{j\varphi_1} \quad z_2 = A_2 e^{j\varphi_2}$$

potom

$$z = z_1 \cdot z_2 = A_1 e^{j\varphi_1} \cdot A_2 e^{j\varphi_2} = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

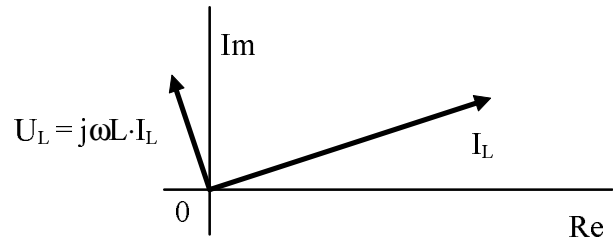
v našem případě budiž

$$z_1 = A_1 e^{j\varphi_1} \quad z_2 = j = 1 \cdot e^{j\pi/2} \quad z = A_1 e^{j(\varphi_1 + \pi/2)}$$



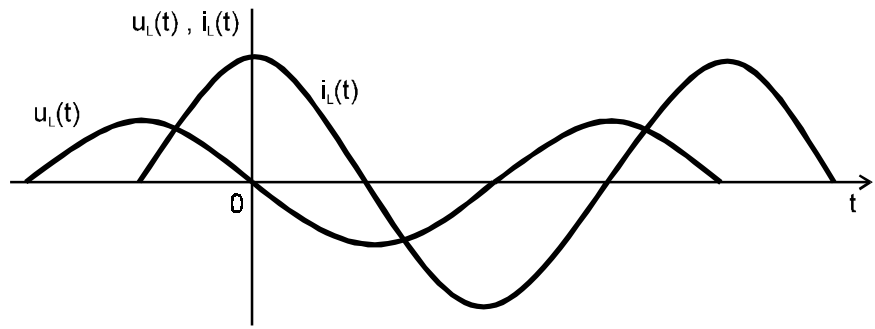
Obr. 1.5-7

Násobení j / imaginární jednotkou / znamená otáčení v kladném smyslu o úhel $\pi/2$, a proto fázorový diagram pro náš případ induktoru bude vypadat takto



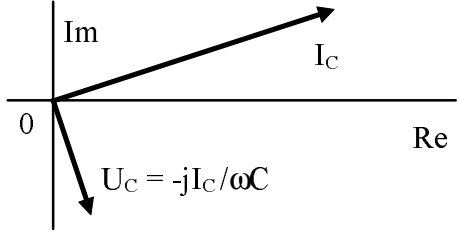
Obr. 1.5-8

a v časové doméně pak takto



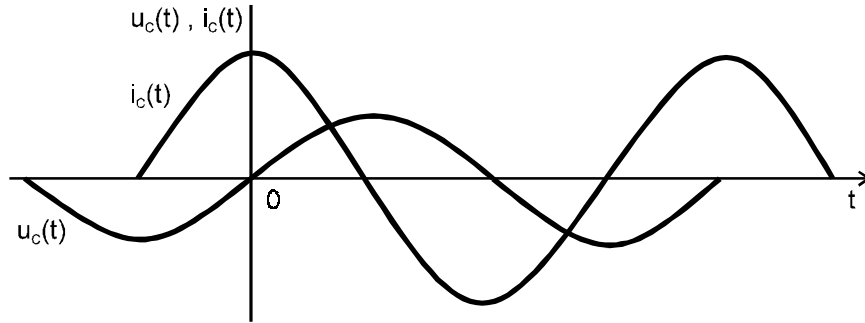
Obr. 1.5-9

Protože $1/j = -j$, násobení $-j$ znamená zpoždění o $\pi/2$, tedy pro kapacitor musí platit následující



Obr. 1.5-10

a v časové doméně pak



Obr. 1.5-11

Na základě předchozího můžeme psát pro lineární prvky:

impedance $U = Z \cdot I$ nebo admittance $I = Y \cdot U$

Rezistor	impedance admittance	$Z = R$ $Y = G$
Kapacitor	impedance admittance	$Z = 1/j\omega C$ $Y = j\omega C$
Induktor	impedance admittance	$Z = j\omega L$ $Y = 1/j\omega L$

Mohou nastat dva případy v obvodech :

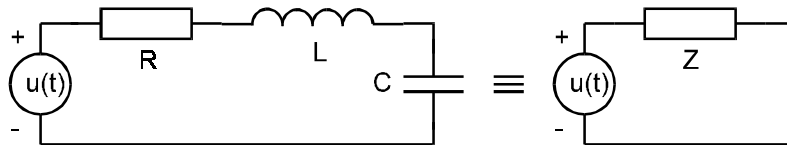
a/ Sériové spojení prvků, které mají impedance Z_1 až Z_n - všemi však protéká stejný proud - jejich napětí se budou sčítat a tedy

$$\hat{U} = \sum_{k=1}^n \hat{U}_k = \sum_{k=1}^n Z_k \cdot \hat{I} = \hat{I} \cdot \sum_{k=1}^n Z_k = \hat{I} \cdot Z$$

kde

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k \quad (1.5.13)$$

Příklad :



Obr. 1.5-12

$$Z = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R$$

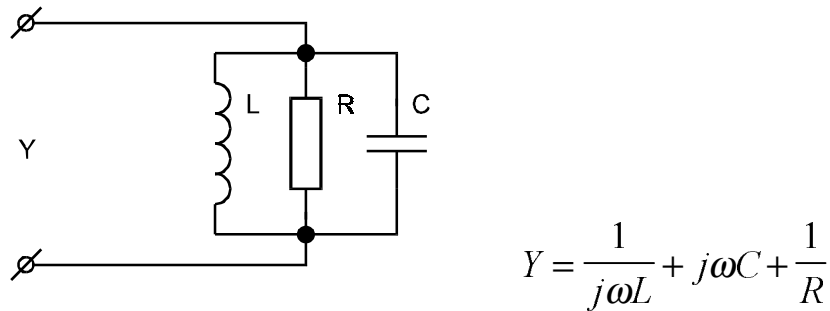
b/ Při paralelním spojení je celkový proud dán součtem proudů dílčích - čili

$$\hat{I} = \sum_{k=1}^n \hat{I}_k = \sum_{k=1}^n \hat{U} \cdot Y_k = \hat{U} \cdot \sum_{k=1}^n Y_k = \hat{U} \cdot Y$$

a tedy

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k \quad (1.5.14)$$

Příklad :



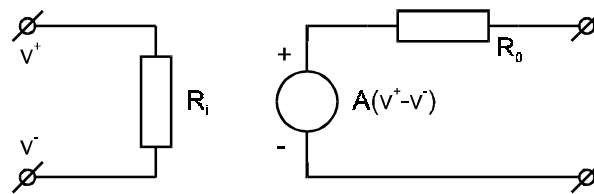
Obr. 1.5-13

Obecně impedance nebo admittance jsou komplexní a můžeme je vyjádřit :

$Z = R + jX$ neboli impedance = rezistance + reaktance

$Y = G + jB$ neboli admittance = konduktance + susceptance

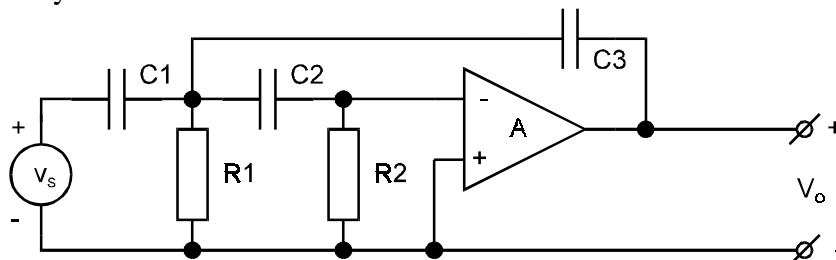
Příklad : Vypočtěte výstupní napětí pro obvod s operačním zesilovačem podle obrázku. Uvažujte náhradní obvod operačního zesilovače ve tvaru



Obr. 1.5-14

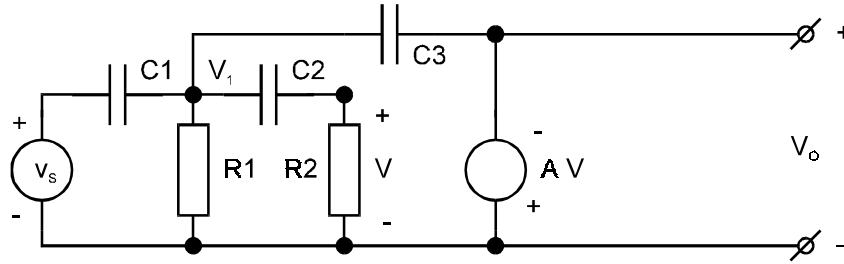
a dále uvažujte, že $R_i \rightarrow \infty$, $R_o \rightarrow 0$.

Náš obvod má tedy tvar



Obr. 1.5-15

Náhradní obvod bude



Obr. 1.5-16

$$(V_1 - V_s)j\omega C_1 + \frac{V_1}{R_1} + (V_1 - V)j\omega C_2 + (V_1 - [-AV])j\omega C_3 = 0$$

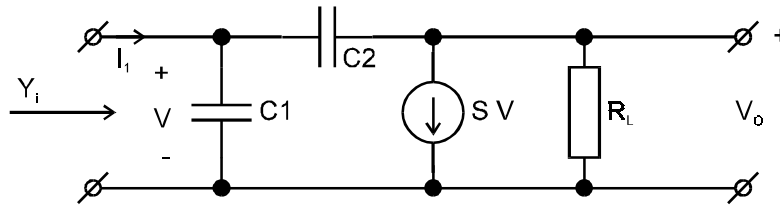
$$(V - V_1)j\omega C_2 + \frac{V}{R_2} = 0 \quad V_o = -A \cdot V$$

V_1, V_s, V, V_o jsou fázory. Po výpočtu bychom pro V_o dostali

$$V_o = \frac{A\omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 \cdot V_s}{1 + j\omega [R_2 C_2 + R_1 (C_1 + C_2 + C_3)] - \omega^2 R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3 + C_3 A)}$$

Pokud by $A \rightarrow \infty$, bylo by $V_o = -\frac{C_1}{C_3} \cdot V_s$.

Příklad : Obvod na obrázku je část ekvivalentního obvodu tranzistorového zesilovače. Určete jeho vstupní admitanci



Obr. 1.5-17

Napišeme dvě rovnice pro dva uzly

$$-I_1 + j\omega C_1 V + j\omega C_2 (V - V_o) = 0$$

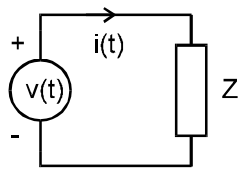
$$j\omega C_2 (V_o - V) + SV + V_o / R_L = 0$$

po výpočtu dostaneme

$$Y_i = \frac{I_1}{V} = j\omega (C_1 + C_2) + \frac{j\omega C_2 (S - j\omega C_2)}{j\omega C_2 + 1/R_L}$$

1.6 Výkonové poměry v elektrických obvodech s harmonickými průběhy

Uvažujme jednoduchý elektrický obvod



Obr. 1.6-1

Pro ustálené napětí a proud můžeme psát / obvod byl zapojen a nastal ustálený stav /

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \Theta_v) \quad i(t) = I_M \cos(\omega t + \Theta_i) \quad (1.6.1)$$

Okamžitý výkon je dán

$$p(t) = V_M I_M \cos(\omega t + \Theta_v) \cdot \cos(\omega t + \Theta_i)$$

Protože platí

$$\cos \Phi_1 \cos \Phi_2 = \frac{1}{2} [\cos(\Phi_1 - \Phi_2) + \cos(\Phi_1 + \Phi_2)]$$

bude

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\Theta_v - \Theta_i) + \cos(2\omega t + \Theta_v + \Theta_i)] \quad (1.6.2)$$

Okamžitý výkon má dva členy. První z nich je konstanta nezávislá na čase, druhý člen je harmonický s dvojnásobnou frekvencí 2ω .

Střední výkon můžeme napsat

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_M I_M \cos(\omega t + \Theta_v) \cdot \cos(\omega t + \Theta_i) dt$$

nebo

$$P = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\Theta_v - \Theta_i) + \cos(2\omega t + \Theta_v + \Theta_i)] dt$$

Výpočtem dostaneme

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\Theta_v - \Theta_i) \quad (1.6.3)$$

protože střední hodnota za periodu z harmonické funkce je nula.

Potom pro čistě rezistivní obvod, kdy $\Theta_v = \Theta_i$, bude

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{1}{2} V_{ef} \cdot \sqrt{2} \cdot I_{ef} \cdot \sqrt{2} = V_{ef} \cdot I_{ef} \quad (1.6.4)$$

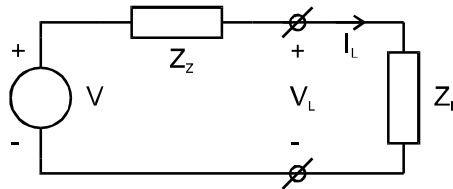
a pro čistě reaktivní obvod, kdy $\Theta_v - \Theta_i = + - 90^\circ$, je

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos 90^\circ = 0 \quad (1.6.5)$$

Princip superpozice pro výkony obecně neplatí a můžeme ho užít pouze v případě, že zdroje mají různé frekvence.

Zajímá nás nyní problém vzájemného vztahu zdroje a komplexní zátěže z hlediska maximálního přeneseného výkonu.

Mějme obvod, v němž působí zdroj s obecnou vnitřní impedancí Z_Z a zátěž Z_L , čili obvod



Obr. 1.6-2

Pro střední výkon jsme dostali

$$P_L = \frac{1}{2} V_{LM} I_{LM} \cos(\Theta_{VL} - \Theta_{IL})$$

Proud a napětí / jako fázory / jsou dány

$$I_L = \frac{V}{Z_Z + Z_L} \quad V_L = \frac{V \cdot Z_L}{Z_Z + Z_L}$$

kde

$$Z_Z = R_Z + jX_Z \quad Z_L = R_L + jX_L$$

Amplitudy těchto fázorů dostaneme po výpočtu

$$I_{LM} = \frac{V_M}{\sqrt{(R_Z + R_L)^2 + (X_Z + X_L)^2}} \quad V_{LM} = \frac{V_M \sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_Z + R_L)^2 + (X_Z + X_L)^2}}$$

Označíme-li $\Theta_{VL} - \Theta_{IL} = \Theta_L$, dostaneme

$$\cos \Theta_L = \frac{R_L}{\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}$$

a dosadíme-li vše do rovnic pro P_L , dostaneme

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V_M^2 R_L}{(R_Z + R_L)^2 + (X_Z + X_L)^2}$$

Chceme maximalizovat P_L a toho dosáhneme, učiníme-li $X_Z = -X_L$, a tím minimalizujeme jmenovatele. Potom dostáváme

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V_M R_L}{(R_Z + R_L)^2}$$

a maximum tohoto výrazu nastává pro $R_L = R_Z$. Potom tedy jako podmínku výkonového přizpůsobení můžeme napsat

$$Z_L = R_L + jX_L = R_Z - jX_Z = Z_Z^* \quad (1.6.6)$$

to tedy znamená, že maximální přenos výkonu mezi zdrojem a zátěží nastane v případě, že impedance zátěže bude mít hodnotu komplexně sdruženou k impedanci zdroje.

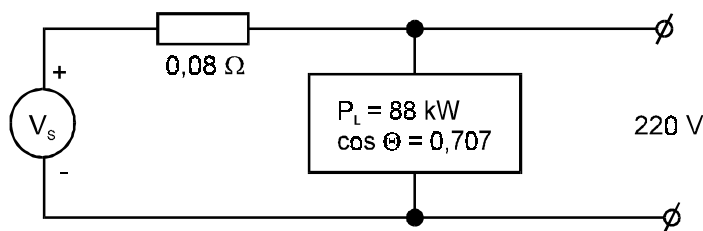
Vraťme se ještě jednou ke vztahu pro střední výkon

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\Theta_v - \Theta_i) = V_{ef} I_{ef} \cos \Theta$$

Hodnotě $\cos \Theta$ říkáme účinník, hodnotě P střední výkon - měříme jej ve wattech, zatímco hodnotě $V_M \cdot I_M$ říkáme zdánlivý výkon a udáváme jej ve VA.

Bude-li $\cos \Theta = 1$, budou napětí a proud zátěže ve fázi a to odpovídá čistě ohmické zátěži. Naopak v případě $\cos \Theta = 0$, půjde o čistě reaktivní zátěž / kapacitního nebo induktivního charakteru /, a střední výkon bude nulový. Důležitost účinníku vysvitne z následujícího příkladu.

Příklad : Malý průmyslový závod je napájen ze sítě, která má odpor $0,08 \Omega$, napětí je $220 V_{ef}$. Účinník je $0,707$. Obvod tedy vypadá takto



Obr. 1.6-3

Platí $P = V_{ef} I_{ef} \cos \Theta$ čili $I_{ef} = \frac{P_L}{V_{ef} \cos \Theta} = \frac{88 \cdot 10^3}{220 \cdot 0,707} = 565,8 \text{ A}$

Výkon, který musí dodat elektrárna $P_S = P_L + 0,08 I_{ef}^2 = 88 + 0,08 \cdot 565,8^2 = 113,6 \text{ kW}$.

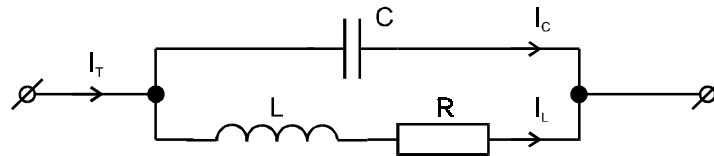
Kdybychom nějakým způsobem zvedli účinník na hodnotu 0,9 , dostali bychom obdobně $I_{ef} = 444,4 \text{ A}$, $P_S = 103,8 \text{ kW}$ a nakonec kdybychom měli čistě ohmickou zátěž, bylo by $I_{ef} = 400 \text{ A}$, ztráty na přívodech $12,8 \text{ kW}$ a elektrárna by musela dodávat $100,8 \text{ kW}$.
Kdybychom namísto se sítí 220 V_{ef} pracovali za jinak stejných podmínek se sítí 480 V_{ef} , dostali bychom pro $\cos \Theta = 0,707$, $I_{ef} = 259,3 \text{ A}$ a $P_S = 93,38 \text{ kW}$ a pro $\cos \Theta = 0,9$, $I_{ef} = 203,7 \text{ A}$ a $P_S = 91,32 \text{ kW}$.

Z tohoto příkladu plyne, že z důvodu ztrát ve vedeních sítě je výhodné pracovat s účinníkem blížícím se k jednotce a se síťovým napětím co možná nejvyšším. Obojí totiž určují odebíraný proud. Běžná zátěž průmyslových podniků má charakter ohmické zátěže s induktivní složkou /elektrické motory / . Proto proud touto zátěží bude

$$I_L = \frac{V \mid 0^\circ}{R_L + jX_L} = \frac{V}{Z_L \mid \Theta_{ZL}} = I_L \mid \underline{-\Theta_{ZL}}$$

Připojíme-li k této zátěži kapacitor podle Obr. 1.6-4 , bude jeho proud

$$I_C = \frac{V \mid 0^\circ}{-jX_C} = I_C \mid \underline{90^\circ} = \omega \cdot CV \mid \underline{90^\circ}$$



Obr. 1.6-4

Celkový proud je dán $I_T = I_C + I_L$ a je tedy možné tímto způsobem ovládat velikost $\cos \Theta$.

Komplexní výkon je definován jako

$$\hat{S} = \hat{V}_{ef} \cdot \hat{I}_{ef}^* \quad (1.6.7)$$

kde I_{ef}^* je hodnota komplexně sdružená k hodnotě I_{ef} , to jest jestliže $\hat{I}_{ef} = I_R + jI_I$, potom $\hat{I}_{ef}^* = I_R - jI_I$ a komplexní výkon může být vyjádřen ve tvaru

$$\hat{S} = V_{ef} I_{ef} \cdot e^{j(\Theta_V - \Theta_I)} \quad (1.6.8)$$

a rozepíšeme-li na reálnou a imaginární část

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\Theta_V - \Theta_I) \quad Q = V_{ef} I_{ef} \sin(\Theta_V - \Theta_I) \quad (1.6.9)$$

kde P představuje reálný střední výkon, zatímco Q je imaginární - jalový výkon

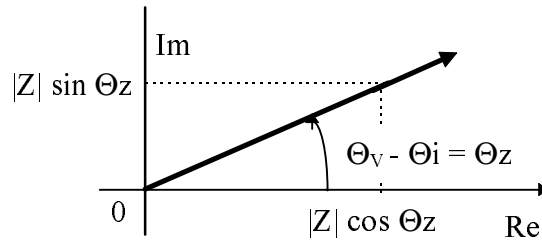
$$\hat{S} = P + jQ \quad (1.6.10)$$

Protože impedanci mohou psát obecně

$$\hat{Z} = \frac{V_M}{I_M} e^{j(\Theta_V - \Theta_I)} = Z_M e^{j\Theta_Z} = |\hat{Z}| e^{j\Theta_Z}$$

platí

$$\cos(\Theta_V - \Theta_I) = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|\hat{Z}|} \quad \sin(\Theta_V - \Theta_I) = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{|\hat{Z}|}$$



Obr. 1.6-5

a dále

$$\hat{Z} = \frac{V_M}{I_M} e^{j\Theta_Z} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} e^{j\Theta_Z} = |\hat{Z}| e^{j\Theta_Z}$$

čili

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{|\hat{Z}|}$$

a proto bude

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\Theta_V - \Theta_I) = I_{ef}^2 |\hat{Z}| \frac{\operatorname{Re}(\hat{Z})}{|\hat{Z}|} = I_{ef}^2 \operatorname{Re}(\hat{Z}) \quad (1.6.11)$$

Obdobně

$$Q = I_{ef}^2 \operatorname{Im}(\hat{Z}) \quad (1.6.12)$$

Proto tedy

$$S = P + jQ = I_{ef}^2 \cdot Z \quad (1.6.13)$$

1.7 Přenos a frekvenční charakteristiky lineárních obvodů

Často nás bude zajímat, jak se bude daný elektrický lineární obvod chovat v jistém pásmu frekvencí. Abychom toto mohli posoudit, zavedeme frekvenční charakteristiky. Mějme elektrický obvod s jedním párem vstupních svorek a jedním párem svorek výstupních.



Obr. 1.7-1

Abychom se vyhnuli stálému psaní $j\omega$, zavedme $j\omega \equiv s$, potom na vstupu bude působit $V_1 \cdot e^{st}$ a na výstupu bude $V_2 \cdot e^{st}$. V_1 a V_2 jsou fázory.

Obecně na vstupu budeme mít veličinu $X_1 \cdot e^{st}$, kde X_1 bude buď V_1 nebo I_1 a totéž bude na výstupu $X_2 \cdot e^{st}$ a X_2 bude buď V_2 nebo I_2 . Potom poměr

$$H(s) = \frac{\hat{X}_2 e^{st}}{\hat{X}_1 e^{st}} = \frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1} \quad (1.7.1)$$

nazveme přenosem nebo přenosovou funkcí. Mohou existovat čtyři typy

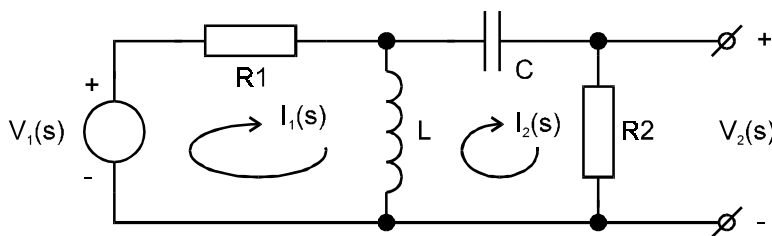
$$\hat{Z}(s) = \frac{\hat{V}_2(s)}{\hat{I}_1(s)} \quad \hat{Y}(s) = \frac{\hat{I}_2(s)}{\hat{V}_1(s)} \quad (1.7.2)$$

a dvě zbývající funkce jsou bezrozměrné

$$\hat{G}_V(s) = \frac{\hat{V}_2(s)}{\hat{V}_1(s)} \quad \hat{G}_I(s) = \frac{\hat{I}_2(s)}{\hat{I}_1(s)} \quad (1.7.3)$$

Poslední dvě funkce se nazývají napěťový a proudový přenos.

Příklad : Určete přenosovou admitanci a napěťový přenos pro obvod podle obrázku



Obr. 1.7-2

$$(R_1 + sL)I_1(s) - sLI_2(s) = V_1(s) \quad V_2(s) = I_2(s) \cdot R_2$$

$$-sLI_1(s) + (R_2 + sL + 1/sC)I_2(s) = 0$$

Vypočteme

$$I_2(s) = \frac{sLV_1(s)}{(R_1 + sL)(R_2 + sL + 1/sC) - s^2L^2}$$

a potom

$$Y(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1}$$

$$G_V(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{LCR_2s^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1}$$

Obecně jsou přenosové funkce vyjádřeny jako podíl dvou polynomů v s . Protože hodnoty obvodových prvků jsou reálná čísla, jsou koeficienty polynomů opět čísla reálná. Můžeme proto psát

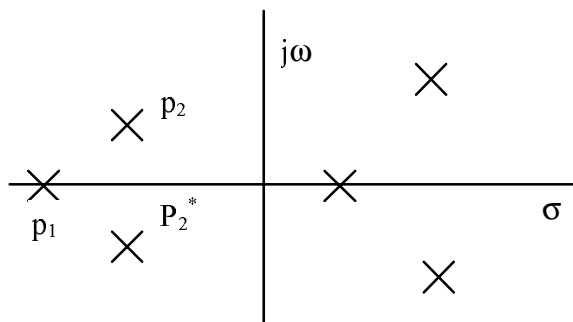
$$\hat{H}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (1.7.4)$$

Tuto rovnici můžeme psát též ve tvaru

$$\hat{H}(s) = K_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (1.7.5)$$

kde K_0 je konstanta, z_1, z_2, \dots, z_m jsou tzv. **nuly** čili kořeny rovnice $N(s) = 0$ a p_1, p_2, \dots, p_n jsou **póly** čili kořeny rovnice $D(s) = 0$.

Póly a nuly mohou být reálné nebo komplexně sdružené dvojice. Uvidíme v dalším, že póly a nuly mají určující vliv na vlastnosti lineárních obvodů a že na základě znalosti jejich polohy v komplexní rovině můžeme určit chování obvodu.



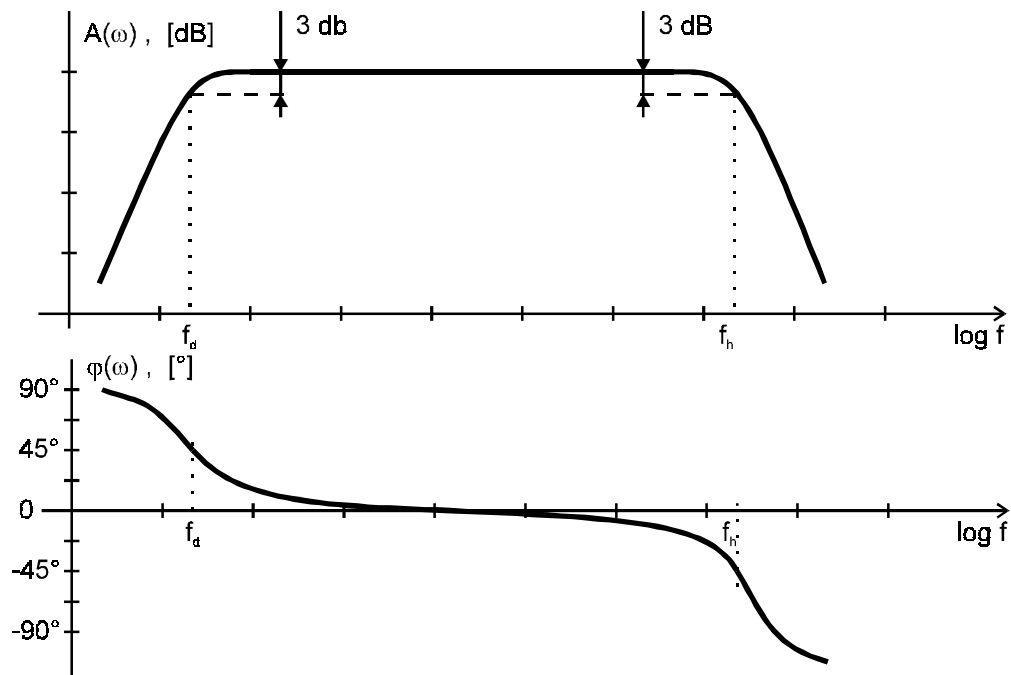
Obr. 1.7-3

$H(s)$ je funkce komplexní proměnné s a můžeme ji v případě $G_V(s)$ psát

$$G_V(s) = G_V(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.7.6)$$

kde $A(\omega)$ určuje amplitudu signálu na výstupu / harmonický signál s frekvencí ω / a nazýváme ji proto amplitudová charakteristika. $\varphi(\omega)$ určuje fázi a nazýváme ji fázová charakteristika.

Příklad amplitudové a fázové charakteristiky nějakého lineárního elektronického obvodu je na obrázku.



Obr. 1.7-4

Na těchto charakteristikách si povšimněme několika věcí. Protože frekvence - jejich rozsah, ve kterém nás tyto charakteristiky zajímají zaujímají často několik řádů, vynášíme frekvence v logaritmickém měřítku / na frekvenční ose nenajdeme proto nulu / .

Amplitudová charakteristika se může pohybovat opět v širokém rozmezí několika řádů. Proto se též vynáší logaritmicky, prakticky to znamená, že např.

$$\hat{G}_V(s) = \left. \frac{\hat{V}_2(s)}{\hat{V}_1(s)} \right|_{s=j\omega} = A(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)} \Rightarrow A(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_{2ef}}{V_{1ef}} \quad (1.7.7)$$

a proto vynášíme $A(\omega)$ v decibelech. Při tom platí

$$A(\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{V_2}{V_1} = 20 \cdot \log \frac{I_2}{I_1} \quad (1.7.8)$$

to znamená, že poměru $V_2/V_1 = 10$ odpovídá 20 dB. Následující tabulka uvádí převody poměrů na decibely :

V_2/V_1	1/100	1/10	1	10	100	1000	10000
dB	-40	-20	0	20	40	60	80

V případě fázových charakteristik jsou rozsahy podstatně užší a proto vystačíme s lineární stupnicí.

Často se stává, že vystačíme s informací o tom, v jakém rozsahu frekvencí dodává náš obvod největší výkon. Za tím účelem definujeme jako mezní frekvence / dolní f_d a horní f_h / frekvence, při nichž dodávaný výkon klesá na polovinu.

Protože platí $P = U^2/R = I^2R$ znamená to, že napětí nebo proud na těchto frekvencích klesá na $U/\sqrt{2}$ nebo $I/\sqrt{2}$. Protože poměr napětí $1/\sqrt{2} = 1/0,707$ odpovídá velmi přibližně hodnotě - 3 dB, definujeme také mezní frekvence tak, že jsou to frekvence, na nichž amplitudová charakteristika klesá o 3 dB.

Amplitudová a fázová charakteristika nám tedy dávají názorný obrázek, jak se daný elektrický obvod chová v případě čistě harmonického signálu. Nedávají nám ale odpověď v případech, kdy signál nebude mít harmonický charakter nebo dokonce když půjde o signály impulsního charakteru. Protože k tomu budeme potřebovat další poznatky z matematiky a teorie obvodů, ponechejme tyto partie na pozdější dobu a obraťme svoji pozornost k polovodičovým prvkům.